PRECURSO I DE FÍSICA

VICERRECTORADO DE INNOVACIÓN TECNOLÓGICA

MEMORIA FINAL

Arturo Norberto Fontán Pérez
Pedro Nogueira López
José Manuel Pico Meizoso
José Antonio Vázquez Rodríguez

OBJETIVOS.

De acuerdo con los objetivos generales de los precursos impulsados por el Vicerrectorado de Innovación Tecnológica se ha elaborado, e incorporado a la Facultad Virtual, el Precurso I de Física.(Mecánica) atendiendo a los siguientes objetivos específicos:

Servir como elemento de reflexión a la comunidad universitaria, que contribuya a definir las necesidades y proponer soluciones destinadas a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la Física en las titulaciones impartidas en la UDC.

Igualar los conocimientos básicos de los alumnos procedentes de diversos itinerarios curriculares previos.

Reforzar y evaluar el aprendizaje de todos los alumnos en los contenidos más relevantes sobre la Mecánica.

ACTIVIDADES Y MATERIALES ELABORADOS.

Se han elaborado materiales didácticos clasificados en los siguientes bloque de contenidos:

Introducción a la Mecánica
Recursos de Matemáticas
Medidas y unidades físicas
Cálculo vectorial
Cinemática
Dinámica
Fluidos

Estos bloques responden a la siguiente estructura general: presentación, objetivos, contenidos, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos, preguntas habituales, bibliografía y recursos Web.

Los materiales que componen este Precurso I de Física se han estructurado de acuerdo a pautas metodológicas que:

Ofrecen una exposición motivadora y clara de los contenidos básicos que se han seleccionado.

Facilitan recursos de aplicación de aprendizajes, aplicando técnicas de resolución de problemas, con ejemplos y ejercicios desarrollados en detalle y escogidos para cada lección.

Aportan medios para la autoevaluación de los aprendizajes teóricos y prácticos, incluyendo ejercicios y cuestiones propuestas, acompañadas de las soluciones correspondientes, y preguntas frecuentes, que inciden sobre los aspectos donde se detectan mayores dificultades de comprensión significativa.

Este Precurso se orienta, en primer lugar, hacia la evaluación inicial que posibilite determinar la situación de cada alumno antes de iniciar la asignatura, y hacerla explícita tanto para el alumno como para el profesor.

Las preguntas frecuentes incluidas en las lecciones, y los ejercicios y las cuestiones resueltas, sirven al alumno y al profesor como instrumento que facilita la evaluación inicial.

Facilita, asimismo, la evaluación formativa o reguladora de los aprendizajes. A tal efecto, los ejercicios propuestos contribuyen a revisar la correcta comprensión de determinados conceptos. El alumno dispone, además, de los recursos de interacción no presencial proporcionados por la Facultad Virtual, como las tutorías y los debates.

CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado hasta la entrega de esta memoria no ha hecho más que empezar, la información generada estará a disposición de los alumnos que inicien sus estudios en la Universidad de A Coruña a partir del curso académico 2003-2004.

Los responsables de este trabajo quedamos a disposición del Vicerrector de Innovación Tecnológica, para colaborar en el mantenimiento y actualización de este Precurso de Física I.

A Coruña a 25 de septiembre de 2003

I.- BASES TEÓRICAS DEL MEDIO FÍSICO

(Jose Emilio Domenech de Aspe)

Como decía el encantador manual de Física de antaño:

División de los Cuerpos. Atendiendo a su aspecto, se dividen los cuerpos en sólidos líquidos y gaseosos. Esta clasificación es verdad pero no es toda la verdad, no todo es blanco o negro, bueno o malo, sólido o gas, no valen encasillamientos tipificatorios. Necesitamos un criterio que barra todo el espectro de posibilidades. Quizás podríamos clasificar los cuerpos atendiendo a su grado de rigidez.

El concepto de sólido se asocia con lo fuerte, firme, aquello que ofrece mucha resistencia a ser alterado, deteriorado o destruido. Partiendo entonces del concepto de sólido, modificando su grado de rigidez y refiriéndonos al medio físico que nos rodea veremos los diversos estados de la materia.

SÓLIDO RÍGIDO
No admite la más mínima de las deformaciones. Si se le fuerzas más de lo permitido, nose dobla, pierde su cohesión y se rompe. Por ejemplo un cristal (no un vidrio).

Supongamos ahora un cuerpo que admite deformaciones apreciables a simple vista, por ejemplo una viga de acero. La cargamos y se deforma, la descargamos y recupera su forma original. Esto es propio del SÓLIDO ELÁSTICO. La relación entre tensiones y deformaciones de los sólidos elásticos viene regulada por la ley de Hooke.

Si cargamos demasiado la viga, lo normal es que no recupere totalmente su forma y aparezcan deformaciones remanentes. Hemos solicitado a la pieza por encima de su límite elástico y se comporta entonces como un SÓLIDO PLÁSTICO. Si rompemos un alambre a base de doblados y desdoblados estamos agotando sus propiedades elásticas y plastificándolo hasta el límite permitido por el grado de cohesión interno.
En este estado el material admite deformaciones como respuesta a las acciones sin hacer e más mínimo esfuerzo por recuperar la forma original. Un claro ejemplo sería la plastilina.

Hay que hacer mención de los sólidos, que en función de la recuperación de su forma inicial, se encuentran entre los dos estados mencionados arriba, serían los SÓLIDOS ELASTO-PLÁSTICOS

Existen determinado materiales que se deforman sin que medie acción alguna. Cambian de forma si disgregarse por el mero hecho de cambiar su posición en el espacio. Están cerca del estado líquido pero no se escapan de la mano, toman la forma del recipiente que los contiene, pero se mantienen coherentes sobre un plano horizontal sin desparramarse. Se trata de sólidos en estado de GEL o estado VISCOSO.

La mayor viscosidad corresponde a un sólido, la menor viscosidad a un líquido ideal. Para someterlos a acciones, es preciso confinarlos en un recipiente. Aún así la única acción que soportan oponiendo resistencia es la de compresión.

Descendiendo a la mínima viscosidad, estaremos ante el estado LÍQUIDO. Su característica más importante es la de necesitar un elemento contenedor para que mantenga su forma estable. Su cohesión es tan débil que sobre un plano, la presión vertical de su propio peso le hace tender a ocupar la máxima superficie horizontal. La gran diferencia con los estados vistos hasta el momento es que en el estado líquido los elementos de borde no lo son de contención. Siendo capaces de soportar presiones si se encuentran confinados.

Si la débil cohesión de un líquido se pierde este se convierte al estado GASEOSO. La propiedad más notable es que el gas parece no cumplir la ley más general de este mundo la Ley de la gravedad. Tiene la tendencia a disgregarse buscando ocupar el máximo volumen, por lo que el recipiente que lo contenga debe ser cerrado. Al igual que los líquidos soporta esfuerzo de compresión.

Los contenidos de este precurso de física comprenden el estudio del comportamiento físico de estos estados de la Materia.

<table>
<tr><td rowspan="5">MECÁNICA

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS</td><td rowspan="2">CUERPOS RÍGIDOS</td><td>ESTÁTICA</td><td>REPOSO</td></tr>
<tr><td>DINÁMICA</td><td>MOVIMIENTO</td></tr>
<tr><td>CUERPOS DEFORMABLES</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">FLUIDOS</td><td>INCOMPRESIBLES</td><td></td></tr>
<tr><td>COMPRESIBLES</td><td></td></tr>
</table>

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Principio de la Inercia, fuerzas o campos de fuerzas. F = m x a
Principio de la independencia y superposición de esfuerzos
Principio de la igualad de acción y reacción

Las distintas disciplinas que hoy concurren en la enseñanza de la Mecánica presentan teorías bien desarrolladas y suficientemente contrastadas, que se han revelado como de gran utilidad práctica. Sus conceptos y contenidos han tomado cuerpo a lo largo del tiempo, surgiendo y evolucionando en momentos y lugares diferentes, y por lo general en relación a determinadas necesidades y afanes.

II.2.- DESARROLLO HISTÓRICO

El estudio histórico permite descubrir una cierta lógica en el desarrollo que muchas veces se produce por iteraciones sucesivas (hipótesis que se comprueban y reformulan caso de no ser satisfactorias). Esto puede permite situar el momento actual en un proceso más amplio, y quizás intuir estados futuros.

Del mismo modo, cada avance tiene que ser comprendido en el marco de un determinado contexto sociocultural. En este sentido se establecerán conclusiones en torno a las formas de organización y comunicación, o a las circunstancias y condiciones sociales que lo hicieron posible y permitieron su posterior extensión y aplicación.

Desde sus orígenes, el ser humano se ha enfrentado al problema de encontrar, y posteriormente construir, refugios adecuados donde protegerse de la acción de los elementos. Dada su condición social, no resulta extraño que, con el tiempo, estas primeras edificaciones se elevasen agrupadas en núcleos de mayor o menor número. La ciudad más antigua conocida es el poblado neolítico de Jericó fechado alrededor del 6800 a.C., y constituido por cabañas de barro cocido al sol.

Las culturas de Mesopotamia demostraron una evidente maestría en la fabricación y en el uso constructivo de las piezas cerámicas, de forma que quizás los mejores ladrillos conseguidos datan del 3.000 a.C. Con ellos construyeron arcos e incluso bóvedas de luz próxima a los 30m.

Los egipcios disponías de la piedra caliza, el granito, y los ladrillos como materiales básicos. Si bien conocían el arco, su construcción característica el la adintelada. Cubrían grandes salas utilizando columnas, dinteles monolíticos y losas de grandes piedras constituyendo el techo. Con objeto de proteger los bordes frágiles del capitel, y de centrar la carga de compresión sobre la columna, apoyaban las piezas horizontales sobre dados de piedra. También iniciaron la construcción de dinteles triangulares, ante las limitaciones de los anteriores frente a la flexión.

Los griegos recurrieron igualmente a la solución adintelada de cara a la cubrición de espacios. En este sentido, desarrollaron notablemente los llamados órdenes arquitectónicos (basa, columna, arquitrabe), elementos clave de su expresión estructural y estética.

En Grecia es en donde primero aparece la Filosofía como una actitud humana que persigue el entendimiento del mundo. Los presocráticos, Tales de Mileto, Anaximandro, Anaxímenes, son cosmólogos, naturalistas, físicos, si bien estudian la naturaleza con un propósito y método filosóficos. Los esfuerzos intelectuales se dirigen a la obtención de las causas que explican los hechos observables por la experiencia, y a la exposición de las relaciones existentes entre esos hechos. La afirmación de **Aristóteles** (384-327 a.C.) de que la Física trascendía a la Matemática implicaba en el terreno práctico que los científicos no explotasen los recursos matemáticos en los estudios físicos. Así, mientras en Geometría se desarrollaba una métrica (una forma de expresar cantidades y relaciones entre cantidades), la mayor parte de las afirmaciones en Física Natural carecían de ella.

Con todo, las aportaciones del mundo helénico a la Ciencia en general suponen una herencia de gran relevancia histórica. Cabe destacar la figura de **Euclides** en el ámbito de las Matemáticas.

Aparte de sus conocidos "Elementos" (finales del s. IV a.C.), la tradición árabe le atribuye algún escrito sobre Mecánica. (Véase "El libro de Euclides sobre la balanza, del 970), si bien este dato no ha sido corroborado por ningún texto de la antigüedad clásica.
Es obligado mencionar igualmente los estudios de **Arquímedes** (218-212 a.C.) como verdadero iniciador de la Mecánica, y a quien se debe la ley de equilibrio de la palanca; y los trabajos posteriores de la Escuela de Aristóteles. ("Cuestiones Mecánicas")

A.C. Crombie en su Historia de la Ciencia de S. Agustín a Galileo (Alianza Universal, ,1979) apunta las posiciones metodológicas de la cultura griega:

> *"En la Antigüedad clásica aparecieron varias concepciones totalmente diferentes del método científico dentro del esquema general de la ciencia demostrativa. El método de postulados patrocinado por Euclides se convirtió en el más eficaz, en la aplicación a los temas muy abstractos de la matemática pura, y de la astronomía matemática, estática y óptica. En su carácter más puro no era experimental: Se derivaban largas cadenas de deducciones a partir de premisas que eran aceptadas como autoevidentes. Por ejemplo, el mayor representante griego de este método, Arquímedes, en la mayor parte de los problemas investigados no exigía incluso en la física matemática, ningún experimento: Al formular la ley de la balanza y de la palanca Arquímedes no apelaba al experimento sino a la simetría."*

A partir del año 395 d.C. comienza la dominación romana, en cuya evolución constructiva se acusa un singular ingenio práctico. Perfeccionaron el arco y la bóveda (de medio punto), lo que les permitió cubrir grandes espacios (absorbiendo los empujes mediante muros de apoyo de gran espesor) y abordar esplendida obras públicas, en el ámbito de las cúpulas destaca la del Panteón de Agripa, de 43,50m. de diámetro, donde se utilizaban materiales diversos por anillos, que según se asciende son más ligeros. También idearon un nuevo material, el hormigón, como conglomerado de piedras mortero y cal. En el campo de la arquitectura residencial, elevaron edificios de hasta diez plantas y conocieron problemas tan actuales como la especulación del suelo.

La cultura bizantina, como prolongación oriental de la romana, continuó empleando las mismas técnicas constructivas, si bien con características muy singulares. Así. Mientras en el mundo romano la cúpula se solía destinar a la cubrición de plantas circulares; en Bizancio se aplica también sobre otras cuadradas o poligonales. Como ejemplo, cabe destacar la de Santa Sofía, reconstruida entre los años 558 y 562, de 32,50m. de luz, inscrita en una planta cuadrada y sostenida por cuatro pilares enmascarados al interior por las cortinas murales que continúan en las exedras de los ábsides.

Desde la caída del Imperio Romano hasta finales del s. XII (Alta Edad Media), la construcción europea se muestra directamente influida por la dominación romana, siendo la bóveda, (de medio cañón, de aristas y de lunetas) uno de sus elementos característicos. Del mismo modo se descubren las aportaciones del mundo árabe, cuyo mejor ejemplo es el arco de herradura.

Durante la Baja Edad Media surge la denominada arquitectura ojival o Gótica, caracterizada por el uso generalizado del arco apuntado. Este se desarrollo, criterios estéticos y religiosos aparte, por hecho de transmitir empujes menores que las restantes soluciones hasta entonces utilizadas. En las construcciones góticas se acentúa la distinción entre estructura resistente y materiales de relleno y aislamiento. Pilares y contrafuertes se disponen en los lugares indicados, librando así al muro intermedio de su función estructural permitiendo la apertura de grandes ventanales.

El periodo Renacentista (s. XV y XVI) se caracteriza por las revoluciones artística, científica y socioeconómica que en él tuvieron lugar. Para su mejor entendimiento, también es preciso contemplar las concepciones militares de la época como la ejecución de puentes y vías de comunicación en general y el desarrollo de las fortificaciones. En el ámbito constructivo destaca el uso de la cúpula sobre tambor y pechinas; así como las aplicaciones derivadas de la evolución de la geometría espacial sobre todo las utilizadas para la construcción de los entramados de cubierta de madera.

La figura representativa del Renacimiento es sin duda **Leonardo da Vinci** (1.452-1.519) sobre el que tal vez converge el mayor volumen de información científica de su época:

> *"Leonardo escribe de aritmética y geometría, de pintura y perspectiva, de arquitectura, estática y mecánica, guerra, fortificaciones, venenos, del vuelo de pájaros y hombres y la natación, del movimiento de las aguas y la caída de los graves, de medicina, anatomía y óptica, astronomía, … y en el terreno que nos ocupa, de resistencia de ménsulas y vigas, de arcos y cimentaciones, de soportes, de deformación, proponiendo en todo caso experiencias y modelos mentales con los que abordar la descripción de los fenómenos observados."*
>
> *Cervera Bravo, J. Cálculo de estructuras y resistencia de materiales. Origen y desarrollo histórico de los conceptos utilizados. Tesis Doctoral. E.T.S.A. Madrid, 1.982.*

A través de estas experiencias realiza unas primeras aproximaciones al tema de la descomposición de fuerzas y a la noción actual de momento. Igualmente determina las leyes que rigen el equilibrio en planos inclinados. Leonardo estudió gran cantidad de problemas que hoy se engloban en la ciencia de Resistencia de Materiales, en general sobre elementos sometidos a fuerzas longitudinales y transversales (las dos formas de resistencia que más tarde definirá Galileo). Afronta ensayos de tracción sobre alambres de hierro de diferente longitud. Desarrolla los primeros estudios de flexión, analizando ménsulas con un peso en el extremo libre, y vigas apoyadas, de diferente luz y sección, sometidas a la acción de cargas verticales intermedias. Plantea el problema de la deformación en vigas, tanto a través de la curvatura como de la flecha, término con origen en las similitudes que establece con máquinas bélicas como la ballesta, postulando la linealidad entre acciones y deformaciones.

También realiza experiencias sobre la resistencia de los suelos; y en torno al análisis de la compresión, vinculando ésta al área y a la esbeltez de las piezas, anticipando la concepción actual del pandeo. Por último, destacar sus estudios sobre el empuje y comportamiento de arcos, para los cuales considera que la forma de trabajo del sistema en posición invertida es análoga a la del dispuesto en posición normal.

Galileo Galilei (1.564-1.642) es la otra gran figura de la revolución científica aludida, en el campo de la Mecánica. Rechaza la apreciación de que la resistencia sea una característica simplemente geométrica de comportamiento de los materiales, estableciendo la diferencia existente entre el tema de la proporción y el de la escala.

Distingue dos tipos de materiales, los fibrosos y filamentosos y los que no lo son, división que perdurará durante dos siglos, define y relaciones en términos matemáticos las llamadas resistencia absoluta, a fuerzas longitudinales de tracción y resistencia relativa frente a fuerzas transversales. Galileo aclara los conceptos de fuerza y momento estático, y analiza el fenómeno resistente ante flexión para una viga en voladizo.

En su libro “Discosi e demostración matematiche intorno a due nuove science”, plantea los conceptos de fuerza y momento estático, abordando gran número de problemas de Resistencia de Materiales, como las estabilidad de barras esbeltas, la resistencia de barras a tracción, el fenómeno resistente ante flexión para una viga en voladizo y discute sobre la resistencia de vigas de sección hueca, aunque no considera ninguna relación entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos producidos. La importancia de la obra radica en los temas abordados más que en las conclusiones alcanzadas.

Durante la segunda mitad del siglo XVII surgen las primeras revistas científicas y las academias para el progreso de las ciencias como la Royal Society de Londres. En ésta trabajo activamente **Robert Hooke** (1.635-1.703), cuyos experimentos con resortes comienzan poco después de trabajar en la mejora de los relojes de péndulo para las observaciones astronómicas, hacia el año 1.658. Dos años más tarde establece la ley, que llevará asociado su nombre, de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones en cuerpos elásticos, aunque no se publicará hasta el año 1.676. Hooke no desarrolla en el campo de la Mecánica las derivaciones de su ley; sin embargo sugiere un conjunto de ejes de investigación científica sobre los que tomará también cuerpo la Teoría de la Elasticidad. A partir de él se acrecienta la distinción de planteamiento entre los teóricos y los prácticos de la construcción; y se unifican en una misma línea de estudio los problemas de rotura y deformación.

> *"vemos que Robert Hooke no solo estableció la relación entre la magnitud de las fuerzas y las deformaciones que producen, sino que también sugirió varios experimentos en los que esta relación puede ser usada de cara a la resolución de algunos problemas muy importantes.*
>
> *Timoshenko, S.: History of Strength of Materials. Mc Graw-Hill. Nueva York, 1.953.*

Corresponde a **Mariotte** (1.620-1.684) realizar buena parte de las aplicaciones prácticas intuidas por Hooke, a cuya ley llegó de forma independiente. Miembro de la Academia Francesa de la Ciencias, tuvo que diseñar las tuberías que llevarían el agua al Palacio de Versalles, por los que se interesó en la resistencia ante la flexión de vigas y tuberías, así como el comportamiento de éstas a presión interior. Sus experimentos con madera y vidrio le llevan a valores de resistencia relativa inferiores a los propuestos por Galileo, y a considerar así el comportamiento elástico que precede a la rotura. Igualmente, determina que las fibras superiores, en una sección sometida a flexión, trabajan a compresión, mientras que las inferiores soportan tracción.

Otro miembro de la Royal Society de singular relevancia histórica fue **Isaac Newton** (1.642-1.727), mundialmente conocido por la Ley de la Gravitación Universal y por los estudios que desarrolló acerca del movimiento. Sistematizó con gran lógica los conocimientos inconexos precedentes resolviendo correctamente el problema del equilibrio de fuerzas en general. A él se debe el cálculo de fluxiones que, junto a los trabajos de **Leibniz** (1.646-1.716), constituye la base del cálculo infinitesimal. Este progreso matemático, y la Ley de Hooke antes aludida, dieron solución adecuada a las consideraciones de Galileo sobre la flexión de vigas.

Los hermanos **Jacob** (1.654-1.705) y **John Bernouilli** (1.667-1.748), miembros extranjeros de la Academia Francesa de las Ciencias desde 1.699, desarrollaron diversos ejemplos de aplicación de los nuevos recursos matemáticos. El primero estudió la deformación curva experimentada por barras elásticas, analizando su deducción y construcción para una ley de tensiones que inicialmente supone no lineal. John Bernouilli profundizo notablemente en el ámbito de la Mecánica de Fluidos, y formuló el Principio de los Trabajos Virtuales, que así aparece enunciado en una carta dirigida a **Varignon** (1.654-1.722). Su hijo **Daniel Bernouilli** (1.700-1.782) y su discípulo **Leonhard Euler** (1.707-1.783) elaboraron aportaciones muy importantes al mundo de la Resistencia de Materiales.

Varignon obtiene el paralelogramo de fuerzas a través del de velocidades ya conocido y además establece el principio de superposición de momentos de un sistema de fuerzas respecto de un punto, con lo que quedaba resuelto el problema de equilibrio de un sistema genérico de fuerzas. Daniel Bernouilli deduce, en el año 1.742 que el trabajo interno asociado a la deformación por flexión es proporcional al cuadrado de la curvatura a lo largo de la viga.

En su libro “Mecánica, sive motus scientia analytice exposita” Euler introduce los métodos analíticos, en lugar de los geométricos usados por Newton y sus seguidores. A partir de los trabajos realizados por Bernouilli deduce la ecuación de la elástica y la integra para un cierto número de casos particulares. También inicia el estudio del fenómeno de inestabilidad, en el que encuentra la fórmula de la carga crítica que lleva su nombre, y analiza los efectos de las vibraciones como vigas y placas.

Lagrange (1.736-1.813) es conocido como el fundador de la Mecánica Analítica, cuyos métodos, en sus propias palabras, no requieren consideraciones geométricas o mecánicas, sino operaciones algebraicas que deben seguirse en un orden prescrito. Continúa con el desarrollo de Euler en torno a las curvas elásticas, pero no se limita a calcular el valor de la carga crítica e investiga la deformación cuando la acción real supera aquella.

En estos últimos párrafos se han mencionado diversos trabajos matemáticos enfocados al análisis de curvas elásticas, en los que no se tenía en cuenta la forma en que las tensiones se distribuyen. Este es el punto de vista que adopta **Antonie Parent** (1.666-1.716), quien, a partir de las suposiciones de Mariotte, desarrolla una teoría sobre la forma de la sección vinculada a la resistencia de la viga. Así plantea el clásico problema de cómo obtener una sección rectangular de máxima resistencia cortándola a partir de un tronco circular. Establece la distribución de tensiones normales en una sección sometida a flexión, indicando que ésta no es aplicable en el instante de la rotura, y apuntando también la existencia de unas tensiones tangenciales que equilibran la fuerza externa aplicada.

Los estudios de Parent no fueron muy difundidos, en parte por no haber sido publicados por la propia Academia Francesa, en parte por la escasa claridad con que elaboraba sus escritos. Transcurrieron del orden de sesenta años después de la aparición de los mismo hasta que surge un auténtico progreso en el campo de los cuerpos elásticos, momento en que se sitúan las investigaciones de **Charles-Augustin de Coulomb** (1.736-1.806).

Coulomb, ingeniero militar, expone en sus memorias los fundamentos de la teoría electrostática y del magnetismo, estudia la polarización y electrización por frotamiento, e introduce la noción de momento magnético y la fórmula que lleva su nombre expresando la Ley que rige las fuerzas entre cargas eléctricas. Establece las ecuaciones de equilibrio sobre una fracción diferencial de viga sometida a flexión, y define con todo rigor el concepto de tensión. También inicia un interesante trabajo sobre el tema de la torsión con el fin de determinar la rigidez de una varilla que soporta el peso y las oscilaciones de un cilindro metálico; desarrolla además importantes y diversos estudios sobre empuje de tierras.

Thomas Young (1.773-1.829) fue un hombre de amplio conocimientos, que trabajó en campos tan diversos como la medicina, la arqueología o la física. Desarrolló la teoría de la visión, descubrió e investigo la interferencia de los rayos luminosos, estudio el fenómeno de la difracción e impulso notablemente la teoría ondulatoria de la luz. En su trabajo "A course of lectura on natural philosophy and mechanical arts" introdujo lo que hoy se conoce como el Módulo de Elasticidad Lineal E, por ello conocido como módulo de Young, observó las deformaciones transversales que siempre acompañan a las longitudinales en barras sometidas a solicitación axial, trató los límites de la Ley de Hooke y la aparición de deformaciones inelásticas, realizando además importantes aportaciones en torno a la rotura de cuerpos elásticos producida por impacto. Del mismo modo, planteó por primera vez la solución al problema de la distribución de tensiones en una pieza de sección rectangular solicitada excéntricamente por una acción normal.

Poncelet (1.788-1.867), en su texto "Mecanique industrielle" , desarrolla una completa presentación de los conocimientos que, sobre las propiedades mecánicas de los materiales estructurales, se disponía en aquel tiempo. También realiza un estudio detallado de las acciones dinámicas, y analiza el fenómeno de la fatiga en los metales.

El siglo XIX se halla enmarcado en sus comienzos por la aparición de la Ecole Polytechnique francesa, que dio científicos e ingenieros de la categoría de Poinsot, Biot, Malus, Poisson, Gay Lussac, Arago, Cauchy y Navier.

El ingeniero francés **Henri Navier** (1.785-1.836) establece en 1.821, y por primera vez, las ecuaciones generales de equilibrio par sólidos elásticos isótropos, fundamentos matemáticos de la Teoría de la Elasticidad. Igualmente formula en su obra "Resme des lecons donneés a l'Ecole del Ponts et Chausseés" en 1.826 la resistencia a la flexión en el modo que actualmente se conoce. Estudia la circulación de fluidos por conductos, la deformación de piezas prismáticas sometidas simultáneamente a acciones axiles y laterales, los efectos derivados del choque, y es el primero en plantear un método general de análisis de problemas estáticamente indeterminados.

Navier había desarrollado sus trabajos sobre elasticidad partiendo del concepto de interacción molecular de la materia. **Cauchy** (1.789-1.857), en cambio, introduce aquí el concepto de tensión, y formula así la Teoría Lineal de la Elasticidad en la forma aún hoy vigente. Plantea las ecuaciones que definen el estado tensional en un punto del sólido y el Teorema de Reciprocidad de las Tensiones Tangenciales. Define y determina las tensiones principales y las direcciones principales a ellas asociadas. También analiza el estado deformacional, de forma análoga al tensional, para sólidos elásticos con pequeñas deformaciones; y, posteriormente establece las ecuaciones generales de equilibrio en cuerpos anisótropos.

Simon Denis Poisson (1.781-1.840) aplica las ecuaciones de equilibrio y de contorno a los cuerpos isótropos, y determina que el alargamiento longitudinal experimentado por un prisma traccionado aparece siempre acompañado por contracciones laterales. Evalúa la relación entre ambas deformaciones, y define así el llamado Coeficiente de Deformación Transversal o de Poisson, al que atribuye un valor constante e igual a 1/4. Entre sus restantes aportaciones figuran diversos estudios sobre vibraciones en placas y barras, elaborando en el último caso ecuaciones para las acciones vibratorias longitudinales, transversales y de torsión.

Durante las primeras etapas en el desarrollo de la Teoría de la Elasticidad, se acepta comúnmente la idea de que las propiedades elásticas de los cuerpos isótropos pueden ser completamente definidas por una única constante, el módulo de Young,. El propio Cauchy elabora las ecuaciones de equilibrio con 15 constantes en el caso más general, reducibles a 1, ya planteada por Navier si existe isotropía. Con el tiempo se establece una polémica en torno a los **calores** antes indicados, y como resultado aparecen diversos estudios teóricos y experimentales en orden a clarificar el problema. **George Green** (1.793-1.841), con la introducción del concepto de densidad de energía de deformación y la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, demuestra la existencia de 21 coeficientes para cuerpos anisótropos, y solo 2 en el caso particular descrito.

Gabriel Lamé (1.795-1.870) y **Beenoit-Paul-Emile Clapeyron** (1.799-1.864) realizan grande aportaciones en el marco de la Teoría de la Elasticidad. En su obra “Sur l’equilibre interieur des corps solides homogénes” exponen todos los resultados teóricos entonces conocidos referentes a las deformaciones elásticas de los materiales isótropos; así como un conjunto de interesantes conclusiones y trabajos propios. Entre estos, cabe destacar el llamado elipsoide de Lamé, constituido por los extremos de los vectores tensión en un punto, correspondientes a los infinitos planos que pasan por él.

En 1.852, Lamé presenta “Lecons sur la Théorie Mathématique de l’Elasticité des Corps Solides », que puede considerarse el primer libro de Teoría de la Elasticidad. En él, el autor ha modificado ya la forma de las ecuaciones con objeto de incluir las dos constantes elásticas; conclusión a la que había llegado a través de evidencias experimentales. Dos años más tarde publica “Memoire sur l’équilibre d’élasticité des enveloppes sphériques”; y, en 1.859, “Lecons sur les coordennés curvilignes et leurs diverses aplications”. El último contiene la teoría general de las coordenadas curvilíneas y su aplicación al campo elástico.

George Vides Airy (1.801-1.892) estuvo siempre interesado en el tratamiento de los problemas de ingeniería mediante recursos matemáticos. En relación a la resolución de las ecuaciones diferenciales de equilibrio, fue el primero en utilizar funciones de tensión, lo que supondría un singular avance en el terreno práctico. No obstante, Airy no consideró que la función polinómica propuesta no solo debía las condiciones de contorno, sino también las ecuaciones de compatibilidad, con lo cual la investigación se mostraba incompleta.

George Gabriel Stokes (1.819-1.903) trata en su libro “On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion os slastic solids”, el tema de la derivación de las ecuaciones diferenciales fundamentales de la elasticidad en cuerpos isótropos. Sus trabajos se basan más en resultados de experimentos físicos que en elucubraciones matemáticas; y, con este planteamiento llega igualmente a la consideración de 2 constantes propias del material. Formula dos teoremas en relación a las vibraciones sobre cuerpos elásticos y aporta notables estudios en el campo de la difracción y en torno a los efectos dinámicos sobre puentes.

A mediados del siglo XIX la Teoría de la Elasticidad no ofrecía soluciones rigurosas a los problemas de importancia práctica, por lo que muchos ingenieros preferías dimensionar los elementos estructurales mediante fórmulas empíricas. **Barré de Saint Venant** (1.797-1.896) opinaba al respecto que los avances de tipo teórico debían combinarse adecuadamente con trabajos experimentales, lo cual redundaría en un auténtico progreso en el ámbito de las ingenierías. En 1.853 presenta a la Academia Francesa de las Ciencias su memoria sobre la torsión, en la cual introduce el método “semi-ínverso”. Las soluciones obtenidas por Saint-Venant dan la misma distribución de tensiones en todas las secciones transversales, lo que requiere que las fuerzas externas aplicadas en los extremos se distribuyan del mismo modo. Aplicando el principio que lleva su nombre, concerniente a las tensiones producidas por sistemas de fuerzas estáticamente equivalentes, concluye que sus resultados son suficientemente aproximados en aquellas secciones debidamente alejadas de los puntos de aplicación de las cargas. Son notables sus investigaciones en torno al problema del impacto lateral y longitudinal sobre vigas. Para el caso de una viga solicitada en sus extremos por dos pares iguales y opuestos, propone y verifica sus conocidas suposiciones; que las secciones transversales permanecen planas durante la deformación y que las fibras se encuentran en estado de tracción o compresión simple.

J.M.C. Duhamel (1.797-1.872) sigue el método introducido por Navier y desarrolla por su parte las ecuaciones diferenciales de equilibrio. En ellas incluye unos nuevos términos proporcionales a los cambios de temperatura en las tres direcciones espaciales. Determina también las condiciones de contorno y demuestra que las tensiones de origen térmico pueden evaluarse de la misma forma que las restantes. En este sentido, realiza los cálculos independientemente, y obtiene las tensiones totales por superposición, siendo esta la primera vez que se utilizaba este principio en el análisis tensional. Duhamel trabajó igualmente en la teoría de vibraciones de cuerpos elásticos, aportando un método general de estudio y numerosos casos experimentales.

Phillips (1.821-1.889) trabajó durante largo tiempo en el Servicio Francés de Ferrocarriles, lo que sin duda incidió notablemente en sus investigaciones. Presentó un interesante análisis sobre resortes, basado en la teoría elemental de la flexión de vigas rectas. También estudio el problema de las acciones dinámicas producidas por cargas móviles sobre puentes, cuyas soluciones simplificaría posteriormente Saint-Venant.

Las contribuciones más importantes de **Franz Newmann** (1.798-1.895) a la Teoría de la Elasticidad se encuentran en su gran memoria sobre la doble refracción, en donde expone un conjunto de técnicas ampliamente utilizadas en el análisis foto-elástico. Newmann comienza sus estudios partiendo de las consideraciones de Navier, no obstante, con la ayuda de sus alumnos, establece la necesidad de emplear 2 constantes elásticas en cuerpos isótropos y, experimentalmente, encuentra valores del Módulo de Poisson diferentes a 1/4. También presenta una teoría para el caso general de distribución tensional tridimensional, analiza las variaciones térmicas de forma similar a como hizo Duhamel, y afronta el problema de las deformaciones plásticas.

Gustave Robert Kirchoff (1.824-1.887), discípulo del anterior, desarrolla la teoría general de la flexión de placas, en donde establece hipótesis simplificativas normalmente aceptadas. En este campo analiza también los temas referentes a las condiciones de contorno y a las vibraciones. Otra de sus aportaciones a la Teoría de la Elasticidad es el estudio de la deformación en barras delgadas, lo que llevo a la conocida analogía dinámica de Kirchhof.

Cabe destacar el texto redactado por **A. Clebsch** (1.833-1.872), que contiene una amplia recopilación de conocimientos y, en particular, el capítulo dedicado al estudio de los problemas tridimensionales, cuyos resultados alcanzaron importantes aplicaciones prácticas.

William Thomson, Lord Kelvin (1.824-1.907), era sin duda partidario de os trabajos experimentales, y a tal efecto creó un laboratorio en la Universidad de Glasgow donde conjuntamente con sus alumnos pudo investigar las propiedades de la materia. En este sentido estudió en que media los materiales utilizados se desviaban de las consideraciones teóricas. Sus contribuciones más importantes se encuentran en el ámbito de la Termodinámica.

Durante la primera mitad del siglo XIX, los ingenieros franceses con una mejor preparación matemática, desarrollaron fundamentalmente la Teoría de la Elasticidad. En el mismo período, los británicos se ocupaban del estudio experimental de la Resistencia de Materiales y, si bien no ofrecían grandes aportaciones a la teoría general, sí proporcionaban soluciones inmediatas a los problemas prácticos. De entre los últimos debemos mencionar a **William Fairbairn** (1.789-1.874) y a **Eaton Hodgkinson** (1.789-1.861), el primero se interesó especialmente en las propiedades mecánicas de los nuevos materiales, y en su posible aplicación estructural. Diseño y construyó su propia máquina de ensayos, y realizó un importante estudio en torno a los efectos de la variaciones térmicas y del transcurso del tiempo. Hodkingson publica en el año 1.822 “On the transverse strain and strength of materials”, donde considerando la flexión de barras prismáticas, establece que la suma de las tensiones de tracción debe ser igual a las de compresión en cada sección transversal. En realidad sus conclusiones no eran novedosas, pero su difusión sí permitió que los ingenieros ingleses situaran la línea neutra en su posición correcta. En un trabajo posterior trata experimentalmente la flexión de vigas metálicas, y demuestra que el citado eje neutro se desplaza cuando se incrementa la carga. Son conocidos sus estudios en relación al problema del impacto, y sus aportaciones al análisis del pandeo.

D. J. Jourawski (1.821-1.891) desarrolla, en un trabajo sobre puentes sistema “How”, una teoría sobre la resistencia de piezas rectangulares, tanto de madera como de hierro, constituidas por láminas superpuestas y vinculadas entre sí. La extensión de la mencionada teoría a la determinación de las tensiones tangenciales se debe a E. **Colignon**.

Jacques Antonie Charles Bresse (1.822-1.883) es conocido fundamentalmente por los estudios que realizó sobre barras curvas y su aplicación al diseño de arcos, tema que trata ampliamente en “Recherches analytiques su la flexion et la résistance des piéces courbés”, en el año 1.854. Cinco años más tarde publica los dos primeros volúmenes de su curso de Resistencia de Materiales, y en 1.863, un tercer tomo dedicado a las vigas continuas, donde se aproxima al concepto de línea de influencia.

E. Winkler (1.835-1888) se hace cargo en el año 1.877 de la teoría de las estructuras en la Bau-Akadeime de Berlín, donde se interesó especialmente en el análisis experimental de tensiones. Su contribución más importante a la Resistencia de Materiales radica en su teoría de la flexión de barras curvas, incluyendo, a diferencia de Navier y Bresse, piezas de gran curvatura.

A. Wöhler (1.819-1.914) analizó en profundidad el fenómeno de la fatiga, con motivo de su trabajo en la línea ferroviaria Niedershlesish-Märkische. Trato de encontrar alguna relación entre la resistencia a la fatiga de los materiales y las restantes propiedades mecánicas (evaluadas por criterios experimentales), y trabajó igualmente en el ámbito de las deformaciones plásticas.

Kart Culmann (1.821-1.881) introduce sistemáticamente los métodos gráficos en el análisis de toda clase de estructuras con la publicación de su primer libro de estática gráfica en 1.866 “Die Graphishe Statik). En el desarrolla el estudio del círculo de tensiones, precedente de los trabajos de Mohr.

James Clero Maxwell (1.834-1.879), es su testo “On the equilibrium of elastic solids”, estudia las ecuaciones de equilibrio para cuerpos isótropos, tomando dos constantes elásticas y las aplica a la resolución de diversos problemas. Desarrolló la técnica fotoelástica de análisis tensional, especialmente utilizada en el campo bidimensional. Entre sus aportaciones a la Resistencia de Materiales se incluyen los diagramas de fuerzas basados en la construcción de figuras recíprocas, y su método de cálculo de estructuras trianguladas estáticamente indeterminadas. Precisamente con la elaboración de éste descubre el Teorema de Reciprocidad en su formas simple, que será generalizado posteriormente.

Otto Mohr (1.835-1.918) fue el primero en verificar que la ecuación diferencial de la curva funicular, construida para una carga variable distribuida a lo largo de una viga, tiene la misma forma que la expresión también diferencial de la línea elástica, utilizando dicha relación para determinar esta última. Sus conocidos teoremas han sido de capital importancia en la evolución de la Resistencia de Materiales. Mohr aporta soluciones a la ecuación de los tres momentos en vigas continuas, estudia las líneas de influencia y las aplica por primera vez en el ámbito de la ingeniería. Desarrolla una teoría sobre la representación plan de los estado tensionales, más completa que la presentada por Culmann, lo que dio rigen al trazado de los llamados Círculos de Mohr. En el campo de la Teoría de Estructuras, aplica el principio de los desplazamientos virtuales a sistemas no resolubles por las técnicas entonces conocidas. Descubre independientemente el método ya propuesto por Maxwell para determinar los desplazamientos en una estructura triangulada, y desarrolla un nuevo procedimiento con objeto de simplificar las dificultades del anterior.

En el año 1.878 **Gerber** crea las vigas que llevan su nombre, convirtiendo en isostáticas las vigas continuas mediante la adecuada disposición de articulaciones intermedias; **Luigi Cremona** (1.830-1.903) proporciona, con su conocido diagrama, un sencillo método de cálculo de sistemas triangulados con nudos articulados.

A finales del siglo XIX, los Principio Energético se aplican a la resolución de problemas hiperestáticos**. L. F. Mënabréa** desarrolla el Principio del Trabajo Mínimo, si bien no aporta una demostración satisfactoria. Esta labor correspondería posteriormente a Alberto Castigliano (1.847-1.884), quien estableció en el año 1.876 su célebre teorema para el cálculo de desplazamientos a partir de la energía de deformación.

La introducción del acero en la construcción dio lugar a problemas de inestabilidad de suma importancia. El conocimiento en este campo avanzó de la mano de **Ludwig von Tetmajer** (1.850-1.905), cuyos resultado experimentales condujeron a la deducción de la fórmula empírica que lleva su nombre; **F. S. Jasinsky** (1.836-1.899), quien analizó el fenómeno del pandeo en las diagonales comprimidas; y de **Friedrich Engesser** (1.848-1.931) que propuso ampliar el ámbito de aplicación de la fórmula de Euler mediante el uso del módulo Tangente, en vez de la constante E, desarrollando un método de cálculo de cargas críticas por aproximaciones sucesivas. A él se debe igualmente la generalización de la Teoría de Castigliano, con la noción de Energía complementaria.

Joseph Valentin Boussinesq (1.842-1.929) es responsable de múltiples avances en Hidrodinámica, Óptica, Termodinámica y Teoría de la Elasticidad. Son especialmente relevantes sus estudios sobre el comportamiento de barras y placas delgadas, John William Strutt, **Lord Raleigh**, desarrolló ampliamente la teoría de vibraciones en su trabajo "The theory of sound". Sus estudios fueron ampliados por **Sir Horace Lamb** (1.849-1.934) al caso de láminas cilíndricas y esféricas; y utilizados por **A. Z. H. Love** (1.83-1.940) en diversos trabajos, incluyendo uno particularmente interesante acerca de la propagación de ondas sísmicas. Love formula en el año 1.926 las expresiones generales de los potenciales escalares y vectoriales para problemas elásticos tridimensionales.

A Ludwig Prandtl (1.875-1.953) se le considera uno de los fundadores de la moderna dinámica de los fluidos. Realizó estudios sobre la flexión pura de barras curvas con sección rectangular estrecha, e inicio la investigación sobre el fenómeno de la estabilidad lateral de vigas. En el año 1.990 accede al instituto Politécnico de Hannover, donde desarrolla la analogía de la membrana con el fin de estudiar el problema de la torsión. También se interesó por el campo de las deformaciones plásticas, en el que avanzó notablemente respecto de los trabajos de Saint Venant.

A comienzos del siglo XX la Teoría Matemática de la Elasticidad se orienta a la búsqueda de soluciones generales de tipo analítico. **B. D. Galerkin** en el año 1.915 desarrolla una serie de trabajos para la resolución de problemas elásticos mediante la utilización de la solución aproximada en lugar de la real; su método consiste en minimizar el error que se comete, mas adelante en el año 1.930 introdirá las ecuaciones tangenciales de desplazamiento para funciones biarmónicas, **P. F. Papkowith** en el año 1.932 y **H. Neuber** obtienen por separado la expresión de los movimientos a partir de cuatro funciones armónicas; y el estudio de la Elasticidad Plana se ve impulsado con el uso de la variable compleja propuesto por **G. V. Kolossoff** en el año 1.909, estos trabajos fueron completados posteriormente por **N. I. Muschelisvili** en el año 1.949.

En relación a los problemas de tipo dinámico y de estabilidad, derivados de una mayor optimización de los elementos estructurales en general, cabe destacar los estudios realizados por S**tephen P. Timoshenco**, **Arman**, **Hartog** y **Collatz**. En el ámbito de la Teoría de la Plasticidad mencionaremos a **Reus** (1.930), **Hill** (1.950), **Nadai** (1.931) y **Prager** (1.953); y en el del Cálculo Plástico a **Neal** (1.956), **Herman** (1.957) y **Horne** (1.971) entre otros.

En el año 1.905 Timoshenko estudia la torsión no uniforme y calcula las tensiones normales producidas por el alabeo de la sección, afirmando las limitaciones que presenta el principio de Saint-Venant cuando se presenta este tipo de torsión.

Dentro del progreso de los estudios teóricos figuran los relativos a las cimentaciones que conllevan el conocimiento de las características de los terrenos y de la distribución de tensiones en los mismos. Todo ello ha determinado el desarrollo de la Mecánica del Suelo, cuyos principios fundamentales fueron establecidos por el profesor **Terzaghi**.

El siglo XX se caracterizó también por la extensión de la ciencia y por el desarrollo de nuevos materiales, hormigón armado y pretensado, aleaciones ligeras de aluminio, acero inoxidable, productos antitérmicos y antiacústicos, plásticos y productos cerámicos. En este panorama han jugado un papel importante múltiples consideraciones de orden social, como la creciente investigación en equipo, el trabajo de los laboratorios de ensayos, el intercambio constante de la información o los avances de la electrónica, que ha conducido a la actual progresión de la informática y sus aplicaciones.

Con la introducción del hormigón armado en la práctica constructiva se elevaron muchas estructuras reticuladas con alto grado de hieperestaticidad. Previamente se habían desarrollado diversos métodos con los que resolver esta clase de sistemas, como los procedimientos presentados por **Axel Bendicen** o **K. A. Calisev**. En 1.930 **Hardy Cross** da a conocer el método de cálculo que lleva su nombre, y que supuso una de las principales aportaciones de la época.

Entre 1.915 y 1.926, Maney y Ostenfeld ya habían planteado el cálculo matricial de forma muy aproximada a como se conoce en la actualidad; apoyándose para ello en los trabajos de Maxwell, Castigliano y Mohr, y en los métodos de resolución de grandes sistemas de ecuaciones formulados por Gauss. El descubrimiento del ordenador, y su evolución permitieron la utilización práctica de estos recursos, así como la construcción de sistemas estructurales no abordables anteriormente.

En 1.956 surge el Método de los Elementos Finitos, como extensión del propio cálculo matricial, merced al trabajo de los ingenieros Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. y Topp, L.J. que presentaron en el año 1.956 su trabajo titulado: “Stiffness and deflection analysis of complex structures”. En el año 1960, Ray Clough fue el primero que utilizó el término ‘elemento finito’.

En los inicios de la década de los 60, fue ampliamente reconocida la validez matemática de Método de los elementos finitos.. El método de los elementos finitos fue considerado una herramienta ideal para adaptarse al entorno informático, a pesar de que John Blankenbaker construyó en 1.971 el primer ordenador personal, no fue hasta después de 1.989, con el anuncio por parte de Intel de su procesador 80846 y el coprocesador i860 RISC (ambos conteniendo alrededor de un millón de transistores), el momento en el que los ordenadores pudieron aportar su capacidad para la resolución eficaz de la multitud de ecuaciones que se plantean en el Método de los Elementos Finitos, cuyo desarrollo ha ido caminando parejo desde entonces, con las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores.

El primer programa de cálculo por el método de elementos finitos de propósito general hizo su aparición durante la década de los 70, mientras que el primer programa de pre- y post- proceso para la utilización del método no lo hizo hasta los años 80, permitiendo a partir de ese momento la descentralización de los programas de elementos finitos, y contribuyendo a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD) y las técnicas de fabricación (CAM).

Como se mencionaba al inicio de esta reseña histórica todo progreso debe entenderse también a través del contexto sociocultural en el que tiene lugar. El panorama actual no debe presentarse al alumno como una realizad cerrada. Antes bien, las Ciencias que aquí nos ocupan están en constante y vertiginoso avance, y los futuros profesionales deben prepararse para afrontar este hecho: Conociendo el pasado, dominando el conjunto de conocimientos ya asentados y disponiendo de las capacidades suficientes para buscar e incorporar toda nueva información.

La historia también nos enseña la fertilidad que supone el hecho de disponer de una preparación multidisciplinaria y no excesivamente especializada. Igualmente habla de los beneficios del trabajo en equipo y del intercambio y extensión de la información, aspectos claramente potenciados con el actual desarrollo y accesibilidad de las redes informáticas.

Tema: Medidas y Unidades físicas

Presentación

Medir distancias y tiempos, así como cualquier propiedad de los objetos, y de las interacciones entre ellos, está en la base de toda la Física. La medida no es sólo consustancial con el conocimiento científico, sino que resulta habitual en numerosas actividades profesionales y técnicas.

En este tema se explica la forma correcta de expresar el resultado de una medida, incluyendo la información de la incertidumbre asociada al mismo, puesto que no hay medida sin error.

Sólo utilizando unos mismos patrones o referencias para la medida de las magnitudes podremos ponernos de acuerdo en sus resultados, comprenderlos, y construir el conocimiento de la realidad que observamos. Es pues, fundamental, que dediquemos parte del tema al Sistema Internacional de Unidades, sistema de unidades de uso legal en la Comunidad Europea, además de ser el empleado por la comunidad científica internacional.

Se introducen solamente contenidos básicos, dado el objeto del Curso Cero. Consideramos que a partir de ellos será posible construir un aprendizaje más profundo y extenso de los tópicos tratados, en las diferentes materias y según los objetivos de cada una de ellas.

Objetivos

Expresar correctamente los resultados, con el número apropiado de cifras significativas, teniendo en cuenta los errores de las medidas y la precisión de los datos.

Interpretar adecuadamente los datos obtenidos en el desarrollo del trabajo científico, empleando las cifras significativas y unidades del sistema internacional apropiadas.

Conocer y utilizar las magnitudes fundamentales y derivadas más importantes y aplicar las unidades apropiadas, utilizando factores de conversión cuando sea necesario.

Contenidos

1. Medidas e Incertidumbre

2. Incertidumbre y cifras significativas Notación científica.

3. Unidades físicas y Sistema Internacional de Unidades.

4. Conversión de unidades.

5. Dimensiones de las magnitudes físicas.

Resolución de Problemas.

Referencias.

1. Medidas e Incertidumbre.

Una **magnitud física** es cualquier atributo de un cuerpo o un fenómeno, susceptible de ser medido. Ejemplos: longitud, masa, tiempo, potencia, velocidad, luminosidad, temperatura, etc.

Para establecer el valor de una magnitud debemos usar **instrumentos de medida** y planificar o seguir un **método de medida**. Además, debemos emplear las **unidades de medida** establecidas.

El acto de medición consiste en determinar cuántas veces el valor de una magnitud contiene al valor unidad o patrón de medida.

Por ejemplo, si deseamos medir el largo del lápiz que tenemos a mano, probablemente escojamos como instrumento de medida una regla, y procuremos realizar la medida disponiendo el lápiz y la regla de manera que permitan una adecuada comparación de las longitudes (si bien puede que no hayamos reflexionado sobre el método de medida, la experiencia o la intuición nos mueven a realizarla de una forma concreta, que nos parece adecuada). En el Sistema Internacional de Unidades, la unidad para medir longitudes es el metro, y entonces, la regla está calibrada en esa unidad o en submúltiplos de ella.

Todo resultado debe expresarse, en primera instancia, con un valor numérico (que informa del número de veces que el valor medido contiene al valor unidad) y el símbolo (o abreviatura) de la unidad de medida utilizada.

Ejemplo:
En nuestro caso anterior, la longitud del lápiz podría escribirse como
L = 16,4 cm

Coloquialmente, el término **error** suele ser sinónimo a equivocación. En Ciencias o Ingeniería, el error de una medida está asociado al concepto de **incertidumbre** en la determinación del resultado.

Toda medida conlleva cierta incertidumbre en el resultado. En el lenguaje técnico, cualquier pieza o componente fabricado tiene una cierta **tolerancia.**

Las fuentes de error tienen diversos orígenes, atribuibles, fundamentalmente, al entorno, al método y al propio objeto de medida, al instrumento utilizado y al sujeto que realiza la medida.

Los errores suelen clasificarse en **sistemáticos** (ocurren siempre en el mismo sentido), **ilegítimos** (cometidos por equivocación o descuido) y **estadísticos o aleatorios** (se producen al azar). Un buen experimentador debe ser capaz de corregir los dos primeros, y convivir, de una manera controlada, con los últimos.

Para controlar los errores aleatorios se recurre a la **Estadística** y a la repetición del experimento. Al repetir la medida, se obtiene la mejor información del valor más probable del resultado, así como de la desviación con respecto a ese valor.

Lo que se procura en toda medición es conocer las cotas o límites de las incertidumbres, además de establecer el mejor valor de la magnitud medida.

Ejemplo:
En el caso de la medida de la longitud del lápiz, la incertidumbre en el resultado estaría asociada al valor de la última cifra. 16,4 cm podrían ser 16,3 ó 16,5 cm, pero se ha tomado 16,4 cm como el valor más cercano al "verdadero". Este resultado puede escribirse como: L = 16,4 ± 0,1 cm.

En general, se busca establecer un intervalo: $x-\Delta x \leq x \leq x+\Delta x$, donde con cierta probabilidad, podríamos decir que se encuentra el mejor valor de la magnitud x. Al semiancho Δx lo denominamos **incertidumbre absoluta o error absoluto** de la medida.

En conclusión, la forma correcta de representar el resultado de cualquier medida de una magnitud x es:

$x \pm \Delta x$ (indicando a continuación la unidad de medida).

Si deseamos un parámetro que nos informe directamente de la calidad de la medida, y nos permita comparar ésta entre medidas de diferentes magnitudes, calcularemos la **incertidumbre relativa o error relativo:**

$$\varepsilon_x = \Delta x / x$$

Como vemos, es un número que carece de unidades, al expresarse numerador y denominador con las mismas. El semiancho Δx es menor que el valor de la magnitud x, de modo que suele multiplicarse el número anterior por cien para tener un **error relativo porcentual:**

$$\varepsilon_x = 100 \cdot \Delta x / x \quad \%$$

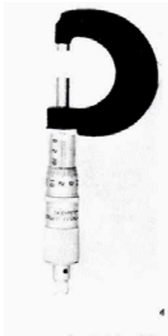
Ejemplo:

Medida de la longitud del lápiz: L = 16,4 ± 0,1 cm.
Estimación de la incertidumbre absoluta: Δx = 0,1 cm
Estimación de la incertidumbre relativa: ε_x = 0,1 cm / 16,4 cm = 0,006 ε_x = 0,6 %

2. Cifras Significativas e Incertidumbre

A menudo obtenemos resultados con un gran número de cifras, bien como consecuencia de un cálculo, bien al utilizar un instrumento de precisión, bien a través de un determinado software. Hay que ser muy cuidadosos con el número de cifras que dejaremos en el valor del resultado final que consignamos.

La **precisión** de un instrumento de medida es el valor hasta el cual pueden detectarse diferencias entre cantidades. Cuanto más preciso sea el instrumento, más cifras significativas tendrá el resultado.



Se entienden por **cifras significativas** aquellas que son razonablemente conocidas o fiables en la medida, de manera que la incertidumbre afecta a la última cifra significativa. En este sentido, la magnitud de la incertidumbre debida únicamente a la precisión de la medida, se reduce cuando ésta aumenta y se obtienen más cifras significativas.

Los ceros que fijan el orden decimal no se consideran cifras significativas.

Ejemplo: ¡Los ceros a la derecha son significativos!

L = <u>16,4</u> cm posee 3 cifras significativas, de modo que la incertidumbre de la medida es del orden de la última cifra (décima de centímetro o milímetro). Por tanto, se entiende que la medida puede estar entre 16,3 y 16,5 cm. La incertidumbre absoluta es Δx = 0,1 cm. La incertidumbre relativa es del 0,6 %.

L = <u>16,40</u> cm posee 4 cifras significativas, de modo que la incertidumbre de la medida es del orden de la última cifra (centésima de centímetro o décima de milímetro). Por tanto, se entiende que la medida puede estar entre 16,39 y 16,41 cm. La incertidumbre absoluta es Δx = 0,01 cm. La incertidumbre relativa es del 0,06 %.

L = <u>16</u> cm posee 2 cifras significativas, de modo que la incertidumbre de la medida es del orden de la última cifra (centímetro). Por tanto, se entiende que la medida puede estar entre 15 y 17 cm. La incertidumbre absoluta es Δx = 1 cm. La incertidumbre relativa es del 6 %.

Nótese que en los ejemplos anteriores, la incertidumbre siempre se ha expresado con una cifra significativa, pues la información fundamental para la estimación de la misma, es el **orden de magnitud u orden decimal**.

Una posible ambigüedad se presenta cuando se hacen **cambios de unidades**. El número de cifras significativas no cambia, pero aparecen más cifras (ceros) para fijar el orden decimal. El empleo de la **notación científica o de potencias de diez** evita estas ambigüedades.

Ejemplo:
Si tratamos de expresar el resultado de la medida del lápiz en micras ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m):
Medida de la longitud del lápiz: $L = 16{,}4 \pm 0{,}1$ cm $\Leftrightarrow L = 164000 \pm 1000\ \mu m$

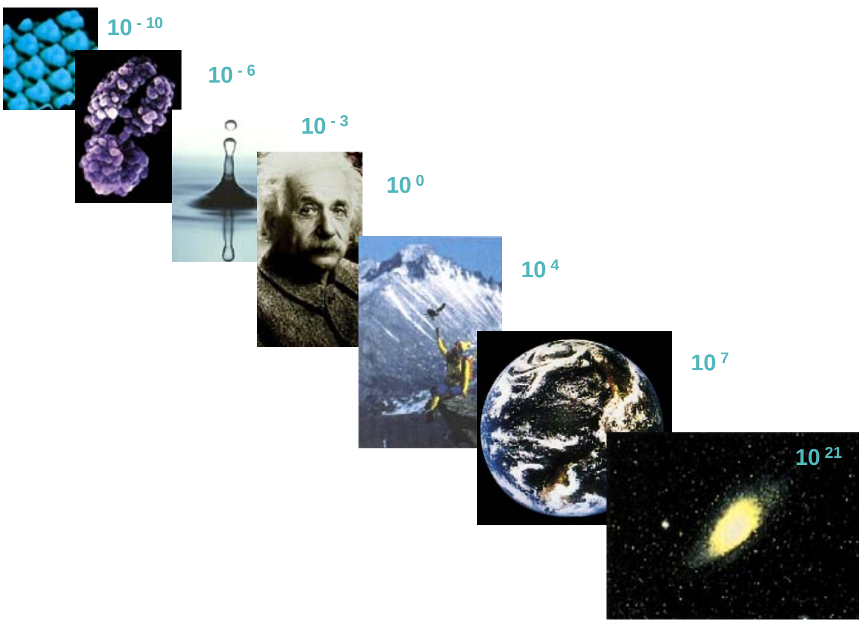
¿Cuántas cifras son significativas? Evidentemente, la medida es la misma, y el número de cifras, por tanto, también.

Empleando la notación científica: $L = (16{,}4 \pm 0{,}1) \times 10^{-2}$ m $\Leftrightarrow L = (1{,}64 \pm 0{,}01) \times 10^{-1}$ m $\Leftrightarrow$ $L = (1{,}64 \pm 0{,}01) \times 10^{-1}$ $(\times 10^{6}\ \mu m)$ $\Leftrightarrow$ $L = (1{,}64 \pm 0{,}01) \times 10^{5}\ \mu m$

En la **notación científica**, sólo se escriben las cifras significativas, con una parte entera entre 1 y 9, y el orden de magnitud se indica con la potencia de diez correspondiente.

Así, $L = (\underline{1{,}64} \pm 0{,}01) \times 10^{5}\ \mu m$, posee 3 cifras significativas: la primera de ellas, que se corresponde con la parte entera, junto con las otras dos, eran las cifras significativas resultado de la medida del lápiz. $10^{5}\ \mu m$ indica simplemente el orden de magnitud.

Es muy conveniente reconocer órdenes de magnitud de algunas magnitudes físicas. Esto nos dará indicios sobre la corrección de algunos resultados. Por ejemplo, en esta sucesión de imágenes se observan órdenes de magnitud de tamaños (en metros):



En general, se obedecen las siguientes normas para escribir correctamente los resultados con su incertidumbre:

Un resultado debe dar solamente los dígitos conocidos fidedignamente, o cifras significativas, en la medida.

El resultado de cualquier medida de una magnitud x, expresado como $x \pm \Delta x$ (unidad), tiene que ser consistente en cuanto al número de cifras que se informen para el valor x y la incertidumbre Δx: la última cifra significativa en el valor de x y en su incertidumbre Δx, expresados en las mismas unidades, deben de corresponder al mismo orden decimal o de magnitud.

Ejemplos:

☺ $L = (1{,}6\underline{4} \pm 0{,}0\underline{1}) \times 10^5$ µm	Incertidumbre con 1c.s.; resultado hasta el segundo orden decimal.
☹ $L = 16 \pm 0{,}\underline{1}$ cm	Incertidumbre con 1c.s.; pero resultado no es consistente con el orden decimal. Si hemos medido con una regla que aprecia mm, no se da esa información y pierde calidad la medida.
☹ $L = 16{,}4 \pm 0{,}\underline{18}$ cm	La incertidumbre se da con más de una cifra. Hay que redondear de modo que el resultado queda L =16,4 ± 0,2 cm.
☹ $L = 16{,}40 \pm \underline{1}$ cm	El resultado transcribe cifras que no son significativas, al venir la incertidumbre dada en las unidades. Debe escribirse L = 16 ± 1 cm

3. Unidades físicas y Sistema Internacional de Unidades.

Toda magnitud física se mide comparando su valor con el de una muestra definida como patrón o valor unitario. Tal patrón recibe el nombre de **unidad** de la correspondiente magnitud física.

Hemos visto que todo resultado debe expresarse con un valor numérico (que informa del número de veces que el valor medido contiene al valor unidad) y el símbolo (o abreviatura) de la unidad de medida utilizada.

La misma magnitud física, en este caso una distancia, tendrá un resultado diferente según el patrón o unidad de medida utilizada.

Aunque históricamente se han establecido numerosas unidades de medida, la tendencia a la estandarización y globalización, hacia la reproducibilidad de los patrones, y hacia su exactitud, ha cristalizado en unos cuantos conjuntos de unidades coherentes entre sí, que constituyen los Sistemas de Unidades.

Todas las magnitudes físicas pueden expresarse en función de un reducido número de **magnitudes fundamentales**, como la masa, la longitud y el tiempo en la Mecánica. La elección de los patrones o **unidades fundamentales** para tales magnitudes diferencia los Sistemas de Unidades.

Es de uso legal en la Comunidad Europea, y universal entre la comunidad científica, el **Sistema Internacional de Unidades, SI**.

Las unidades fundamentales se definen en función de cuidadosas medidas de algún fenómeno físico, o de algún sistema especialmente estable, y por tanto estas definiciones sufren modificaciones conforme avanza nuestro conocimiento y la posibilidad de realizar medidas de mayor calidad.

En el ámbito de la Mecánica, las unidades fundamentales son bien conocidas. Se añaden sus definiciones actuales simplemente para apreciar la metodología descrita.

El **metro (m)** es la unidad SI de longitud. Inicialmente definido en términos de la distancia del Polo N al Ecuador, actualmente se define en función de la velocidad de la luz, como la distancia que la luz recorre en el vacío durante la fracción 1/ 299 792 458 de segundo.

El **kilogramo (kg)** es la unidad de masa del SI. Es prácticamente la única unidad fundamental definida en términos de un patrón físico actualmente: la masa de un cilindro de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia.

El **segundo (s)** es la unidad SI de tiempo. Definido anteriormente en función de la duración del día solar medio, hoy se define en función de la duración de una oscilación atómica: el tiempo que requiere un átomo de cesio 133 para vibrar 9 192 631 770 veces.

Además de las magnitudes fundamentales, de número muy reducido, existe un gran número de magnitudes que se pueden definir en último término en función de ellas, y reciben el nombre de **magnitudes derivadas**, y las unidades correspondientes, **unidades derivadas**, que pueden entonces expresarse en función de las unidades fundamentales. A menudo reciben el nombre de un científico relevante.

En Mecánica, son muy utilizadas las siguientes magnitudes derivadas del SI:

El **newton (N)** es la unidad SI de fuerza. Se llama así en honor de Sir Isaac Newton. Un newton es la fuerza necesaria para impartir a un objeto de un kilogramo de masa una aceleración de un metro por segundo cuadrado.

El **joule (J)** es la unidad SI de energía o trabajo. Se llama así en honor de James Joule. Un joule es la cantidad de trabajo que realiza una fuerza de un newton que se ejerce a lo largo de la distancia de un metro.

El **watt (W)** es la unidad SI de la potencia. Se llama así en honor a James Watt. Un watt es la potencia correspondiente al trabajo realizado a razón de un joule por segundo.

(Nota: en la adaptación legal del SI en España, se permite utilizar nombres de las unidades castellanizados como julio o vatio).

En el SI se definen también las reglas para escribir y trabajar correctamente con los nombres de las unidades y sus símbolos, además de los múltiplos y submúltiplos decimales. Es muy importante ser riguroso en su utilización correcta. Como documentos complementarios, se incluyen los textos legales que describen el SI y su uso.

Por ejemplo,

1 km	**7 km**	**m (metro)** **N (newton)** **Hz (hertz)**
1 km .	**7 kms**	**M (Metro)** **n (Newton)** **HZ (Hertz)**

Las unidades básicas son únicas para cada magnitud.

Sus múltiplos y submúltiplos son decimales, de modo que se corresponden con potencias de 10.

Los nombres de los múltiplos y submúltiplos se forman anteponiendo un prefijo al de la unidad correspondiente.

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto*	h
10^{1}	deca*	da
10^{-1}	deci*	d
10^{-2}	centi*	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Por ejemplo, cuando hablamos de un microsegundo nos referimos a una millonésima de segundo es decir que

$$1\mu s = 1\times 10^{-6} s = 0{,}000001 s$$

Cuando sea necesario realizar operaciones científicas o técnicas, y no meramente matemáticas, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Sumas y Restas

Todas las cantidades deben tener la misma unidad, se suman o restan los números, el resultado debe tener la misma unidad.

Ejemplo:
4 m + 8 m + 3 m = 15 m
5,2 s - 3,8 s = 1,4 s

Productos

Para multiplicar cantidades no es preciso que tengan las mismas unidades. Se multiplican los números, y se multiplican las unidades como si fueran variables algebraicas. Si se emplean nombres de las unidades, se puede escribir un guión entre ellas. Si se emplean símbolos, un punto centrado entre ellos.

Ejemplo:
3 N x 2 m = 6 N.m
3 newtons x 2 metros = 6 newton-metros

Si las unidades se repiten n veces, el producto será el símbolo elevado al exponente n.

Ejemplo:
3m x 5 m = 15 m^2
3 metros x 5 metros = 15 metros cuadrados

Cocientes

Para dividir cantidades no es preciso que tengan las mismas unidades. Se dividen los números, y se dividen las unidades como si fueran variables algebraicas. Si se emplean nombres de las unidades, se escribe por entre ellas. Si se emplean símbolos, una línea diagonal o potencias de exponentes negativos en las unidades del denominador.

Ejemplo:
100 km ÷ 2 h = 50 km/h
100 kilómetros ÷ 2 horas = 50 kilómetros por hora

Si las unidades son iguales, se “cancelan” y no aparecen en el cociente.

Ejemplo:
$6\text{m} \div 3\text{ m} = 2$

Operaciones combinadas

Manteniendo las normas anteriores, en general se opera con las unidades como variables algebraicas.

Ejemplo:

$25\text{ m/s x }6\text{ s} = \quad 150\,\frac{\text{m . s}}{\text{s}} = 150\text{ m}$

$8{,}2\text{ m/s} \div 2{,}0\text{ s} = \quad 4{,}1\,\frac{\text{m / s}}{\text{s}} = 4{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}\cdot\text{s}} = 4{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$1\text{ cm}^3 = (10^{-2}\text{ m})^3 = 10^{-6}\text{ m}^3$

4. Conversiones de unidades.

Una conversión de unidades consiste en expresar una cierta cantidad de magnitud que está dada en una cierta unidad en otra, ya sea del mismo sistema de medida o en otro.

Para ello es necesario conocer las equivalencias entre las unidades en cuestión, llamadas factores de conversión.

Ejemplo:
Sea una cierta cantidad de longitud, digamos 58 cm y se desea convertirla en metros y en pulgadas (in).

Sabemos que:

$$1\,m = 100\,cm$$

Si pasamos el 100 dividiendo nos queda

$$\frac{1\,m}{100} = 1\,cm$$

y 58 cm se puede escribir como:

$$58\,cm \quad = \quad 58\cdot 1\,cm$$

si reemplazamos $\boxed{1\,cm \text{ por } \frac{1\,m}{100}}$ nos queda

$$58\,cm \quad = \quad 58\cdot\,\frac{1\,m}{100}$$

luego

$$58\,cm \quad = \quad \frac{58\,m}{100}$$

hacemos la división y queda

$$58\,cm \quad = \quad 0{,}58\,m$$

Sabemos que:

$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm}$$

pasamos el 2,54 dividiendo y queda

$$\frac{1 \text{ in}}{2{,}54} = 1 \text{ cm}$$

por otro lado 58 cm se puede escribir como

$$58\ cm \quad = \quad 58 \cdot 1\ cm$$

si reemplazamos $\boxed{1\ cm \text{ por } \frac{1 \text{ in}}{2{,}54}}$ (ya que es igual) nos queda:

$$58 \text{ cm} \quad = \quad 58 \cdot \frac{1 \text{ in}}{2{,}54}$$

Finalmente, haciendo la cuenta de dividir resulta:

$$58 \text{ cm} \quad = \quad 22{,}83 \text{ in}$$

Veamos otros ejemplos:

Se desea saber cuántos minutos corresponden a 18 segundos:

Buscamos la relación entre minutos y segundos:

$$1\ min \quad = \quad 60\ s$$

Como queremos pasar de segundos a minutos despejamos "s" de nuestra relación de equivalencia pasando el "60" dividiendo y nos queda:

$$\frac{1\ min}{60} = 1\ s$$

como 18 s es lo mismo que 18 . 1s remplazamos 1s por $\frac{1\ min}{60} = 1\ s$

nos queda $18\ s = \ 18 \cdot \frac{1 \text{ min}}{60} \ = 0{,}3 \text{ min}$

4. Dimensiones de una magnitud física.

Las magnitudes derivadas pueden expresarse en función de las fundamentales de las que dependen. La relación matemática correspondiente constituye las dimensiones de la magnitud derivada. Así, las dimensiones de la velocidad son las de longitud dividida por tiempo.

Las dimensiones de una magnitud son las mismas en cualquier Sistema de Unidades, pero las unidades correspondientes serán diferentes, al utilizarse distintos patrones de medida para las magnitudes fundamentales. Así, las dimensiones de cualquier velocidad son longitud dividida por tiempo, pero las unidades pueden ser metros por segundo, kilómetros por hora, pies por segundo, étc.

La siguiente tabla recoge algunos ejemplos, donde L es longitud, M masa y T tiempo

Magnitud	Símbolo	Dimensión
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Velocidad	v	L/T
Aceleración	a	L/T^2
Fuerza	F	ML/T^2
Presión (F/A)	p	M/LT^2
Densidad (M/V)	ρ	M/L^3
Energía	E	ML^2/T^2
Potencia (E/T)	P	ML^2/T^3

Es importante tener en cuenta lo siguiente:

Sólo se pueden sumar o restar magnitudes que posean las mismas dimensiones.

Las igualdades físicas son **dimensionalmente homogéneas**: ambos miembros de la igualdad deben poseer las mismas dimensiones.

Esta segunda consideración brinda un método muy eficaz para comprobar la corrección de fórmulas o expresiones de leyes físicas.

Por ejemplo, si dudamos si el área de un círculo es $2 \pi r$, basta comprobar que para que sea un área, las dimensiones deben ser L^2 (Longitud x Longitud). Pero las dimensiones de $2 \pi r$ son L (Longitud), pues las constantes de esta fórmula, 2 y el número pi, no poseen dimensiones. Por lo tanto, la expresión no es correcta.

Resolución de Problemas

El tema es eminentemente práctico. Los conocimientos sobre la expresión correcta de los resultados deberían aplicarse siempre. En trabajos técnicos o de investigación será preciso estimar incertidumbres y utilizar correctamente las notaciones y el Sistema Internacional de Unidades, siendo a veces necesario realizar conversiones a otros sistemas.

Por tal motivo, no se incluirán ejercicios detallados en el documento, ya que en cada caso deberá profundizarse en los aspectos más necesarios para cada asignatura, siendo imposible aquí cubrir todos ellos. Para exponer con mayor claridad los conceptos, se han incluido numerosos ejemplos en la lección.

Bibliografía de referencia para esta lección

Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol I, Paul A. Tipler. Ed. Reverté, 1999. Capítulo 1 y Apéndices A y B.

Física Conceptual, Paul G. Hewitt, Ed. Addison Wesley Longman, 1999. Capítulo 1 y Apéndices A y B.

Física, Principios con aplicaciones, D.C. Giancoli, Ed Prentice Hall, 1997. Capítulo 1 y Apéndice B.

Para profundizar: Física Re-Creativa, S. Gil y E. Rodríguez, Ed Prentice Hall, 2001. Módulo I.

Documento: RD que establece y desarrolla el SI como sistema legal de medida en España, disponible en los enlaces de la Facultad Virtual.

Tema: Recursos de Matemáticas

Presentación

Hemos pensado que, con carácter previo al desarrollo de los módulos propuestos como “asignatura de física”, conviene dedicar un tema que recopile aquellas nociones básicas de matemáticas, y que resultan de gran importancia para obtener información sobre aspectos relevantes de la física.

En este caso se trataría de una herramienta auxiliar, dado el uso frecuente de las matemáticas como lenguaje de la física, independientemente de que para una información más amplia se pueda visitar la “asignatura matemáticas cero” ó las páginas de internet sugeridas en este mismo módulo.

En definitiva, se presenta como un repaso de operaciones, ecuaciones y relaciones matemáticas de uso más frecuente, que además se suponen conocidas para la mayoría de los alumnos que se matriculan en cualquiera de las asignaturas de Física de primer curso universitario y que, sin embargo, su utilización al inicio del curso académico presenta ciertas dificultades.

Objetivos

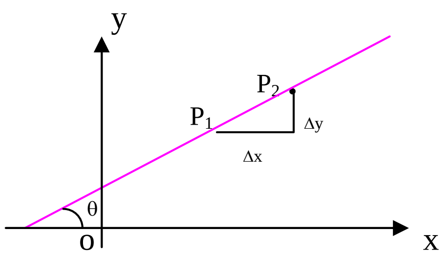
Actualizar algunos aspectos matemáticos relacionados específicamente con la física, o bien aportar complementos formativos de otros cursados previamente en el Bachillerato o en la Formación Profesional.

Contenidos

Ecuaciones y Gráficas

En el campo de la física es frecuente encontrar magnitudes que dependen unas de otras, que se relacionan y expresan mediante ecuaciones matemáticas cuya solución debemos interpretar posteriormente bajo un punto de vista físico. Habitualmente mencionaremos magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, relacionadas a través de ciertas constantes de proporcionalidad, por ejemplo la leyes de Hooke para un muelle elástico y la ley de gravitación universal.

En nuestro caso tratamos de analizar ecuaciones en las que la variable está elevada a la primera potencia, llamada **ecuación lineal**, o bien el caso de ecuaciones que posean variables elevadas a la segunda potencia, llamada **ecuación cuadrática**. En el primer caso son de la forma $\boldsymbol{y = m\,x}$ (recta que pasa por el origen de pendiente $\boldsymbol{m}$), ó bien $\boldsymbol{y = m\,x + n}$ (para el caso de una recta con la misma pendiente $\boldsymbol{m}$, pero desplazada del origen la constante $\boldsymbol{n}$, llamada "*ordenada en el origen*") y en el segundo caso se suelen escribir como $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son constantes. La **solución** de esta ecuación y algunos **ejemplos** de representaciones gráficas figuran en este módulo.

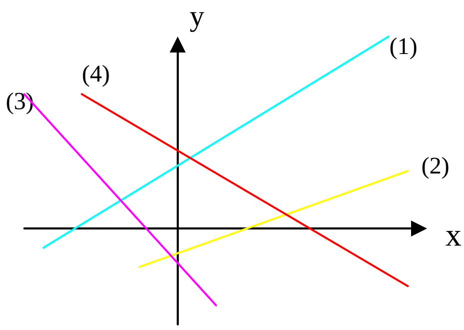


Siendo $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, y la pendiente de la recta:

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ecuación general de la recta :

$$A\,x + B\,y + C = 0$$



Siendo para cada una de las rectas:

(1) $m>0,\ n>0$; (2) $m>0,\ n<0$;
(3) $m<0,\ n<0$; (4) $m<0,\ n>0$

Podemos deducir que:

- del valor que tome **"m"** depende el ángulo que forma la recta con el eje X.
- dos rectas con el mismo coeficiente **"m"** son paralelas.
- si dos rectas poseen el mismo coeficiente **"n"**, cortan al eje Y en el mismo punto.
- si $n = 0$ la recta pasa por el origen.
- si $m = 0$ la recta es paralela al eje X , la trazaremos por el punto $n \neq 0$ del eje Y.

Ejemplos:

1. Recta que pasa por un punto $P(x_p,y_p)$ con un vector director dado por **u** (u_x,u_y)

Ecuación de la recta que pasa por P(-2,2) y que tiene como vector director **u** (1,3).

La expresaríamos en la forma vectorial y paramétrica $(x,y) = P(x_p,y_p) + t\,\mathbf{u}\,(u_x,u_y)$.
Es decir: (x,y)=(-2,2) + t (1,3), obteniéndose: x = -2 + t; y = 2 + 3t
La recta *r* que nos piden se expresará como:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3(x+2) = (y-2) \Rightarrow 3x - y + 8 = 0$$

2. Recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

Ecuación de la recta que pasa por P_1 (2,-3) y P_2(-1,3).

Su vector director viene dado por el vector **u** = $\mathbf{P_1P_2}$ = $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ = (-3, 6)
Tomando el punto P_1 referencia procedemos como en el ejemplo anterior. Es decir:

(x,y) = (2,-3) + t(-3,6) ; x = 2 - 3t; y = -3 + 6t ; obteniéndose para *r*

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{6} \Leftrightarrow 6(x-2) = -3(y+3) \Rightarrow 6x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$$

3. Ecuación *punto-pendiente*. Muy útil si conocemos su pendiente y un punto (x_0,y_0).

En este caso para *r* : Ax+By+C=0 tomaremos m = -A/B y el vector **u** = (-B,A)
La ecuación de la recta se escribe de la forma: $y - y_0 = m\,(x-x_0)$

Ecuación de la recta r_2, paralela a la r_1: x + 2y + 3 = 0, y que pase por P(1,2).

En este caso ambas rectas poseen la misma pendiente m = -A/B = - ½
Por ello directamente escribiremos para la r_2: y – 2 = - ½ (x – 1) $\Leftrightarrow$ x +2y - 5 = 0

Exponentes y Potencias

En múltiples ocasiones, los números decimales los expresamos en términos de potencias de diez al objeto de presentar las magnitudes físicas ó los resultados operacionales de un modo más adecuado.

Así, cuando hablamos de la masa de la tierra ó de la presión atmosférica normal a nivel del mar las expresamos mediante "***notación científica***" como:

$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ (kg) y $p_{at} = 1{,}013 \times 10^{5}$ (N/m^2)

El ***"exponente"*** es 24 en el primer caso y 5 en el segundo.

Estas potencias se expresan de forma habitual:

$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \times 10 = 100$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
$10^{-1} = 1 / 10 = 0{,}1$
$10^{-2} = 1/ 100 = 0{,}01$
$10^{-3} = 1/ 1000 = 0{,}001$

Como regla general, cuando realizamos operaciones con potencias de diez (multiplicaciones o divisiones), procederemos del siguiente modo:

$10^n x 10^m = 10^{n+m}$	$\frac{10^n}{10^m} = 10^n x 10^{-m} = 10^{n-m}$

Ejemplos:

a) $(8{,}25x10^{15}).(4{,}30x10^{-8}) = (8{,}25x4{,}30)x10^{15-8} = 35{,}475 \times 10^7$

b) $(7x10^{-5}).(6{,}03x10^2) = (7x6{,}03) \times 10^{-5+2} = 42{,}21 \times 10^{-3}$

c) $(2{,}52x10^3) : (1{,}44x10^8) = (2{,}52:1{,}44) \times 10^{3-8} = 1{,}75 \times 10^{-5}$

En el caso a) el resultado indica que la coma se debe desplazar siete lugares hacia la "derecha", en el b) tres lugares hacia la "izquierda" y en el c) cinco lugares hacia la "izquierda".

Si tratamos de realizar operaciones con potencias, en las que figuren cantidades arbitrarias x ó y, ó ambas simultáneamente, debemos observar con atención las reglas generales que figuran en la siguiente tabla.

$x^0 = 1 \quad (\text{con } x \neq 0)$ $x^1 = x$ $x^2 = x \,.\, x$ $\qquad x^{1/2} = \sqrt{x}$ $x^3 = x \,.\, x \,.\, x$ $\qquad x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ $x^{-1} = 1 / x$ $x^{-2} = 1 / x^2$ $x^{-3} = 1 / x^3$	$\frac{1}{y^a} = y^{-a}$ $y^a . y^b = y^{(a+b)}$ $\frac{y^a}{y^b} = y^{(a-b)}$ $(y^a)^b = y^{a.b}$ $x^a . y^a = (x.y)^a$ $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	$\sqrt[a]{y} = y^{1/a}$ $\sqrt[a]{x.y} = \sqrt[a]{x}.\sqrt[a]{y}$ $\sqrt[a]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[a]{y}}$ $\sqrt[b]{\sqrt[a]{y}} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[ab]{y}$

Tabla 1. Operaciones más utilizadas

En la siguiente tabla se presentan los múltiplos y submúltiplos como potencias de diez, así como alguno de los prefijos que se utilizan con mayor frecuencia.

POTENCIA	PREFIJO	SÍMBOLO	APLICACIÓN
10^{12}	tera-	T	Tm
10^9	giga-	G	Gm
10^6	mega-	M	Mm
10^3	kilo-	K ó k	Km ó km
10^2	hecto-	H	Hm
10	deca-	D	Dm
$10^0 = 1$	----	----	m “Unidad fundamental”
10^{-1}	deci-	d	dm
10^{-2}	centi-	c	cm
10^{-3}	mili-	m	mm
10^{-6}	micro-	µ	µm
10^{-9}	nano-	n	nm
10^{-12}	pico-	p	pm
10^{-15}	femto-	f	fm

Tabla 2. Prefijos para potencias de diez en el SI de unidades

Logaritmos

Las operaciones con logaritmos están íntimamente relacionadas con los exponentes, y para establecer la conexión entre ambos tendremos en cuenta que cualquier número admite una expresión como otro número elevado a un exponente.

La ***“logaritmación”*** viene a ser una operación inversa de la ***“potenciación”.*** Es decir, si tenemos un número positivo expresado en forma de potencia, $\boldsymbol{x = b^n}$, dónde ***b*** es la ***“base”*** $(b > 0 \text{ , } b \neq 1)$ y ***n*** es el exponente que se conoce como ***“logaritmo”*** del número ***x***, podemos escribir la expresión:

$$x = b^n \text{ ,} \qquad n = \log_b x$$

la cual nos indica que ***n*** es el exponente a que debemos elevar ***b*** para obtener una potencia que resulte igual a ***x.*** El logaritmo de la propia base siempre vale la unidad.

Como **propiedades fundamentales** de los logaritmos debemos recordar que:

• “El logaritmo de un producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de ambos”.

$$\log_b (m.n) = \log_b m + \log_b n$$

• “El logaritmo de un cociente de dos factores es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor”.

$$\log_b (m / n) = \log_b m - \log_b n$$

• “El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo, en base ***b***, de la potencia”.

$$\log_b (m^n) = n \log_b m$$

• “El logaritmo de una raiz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y su índice”.

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{\log_b m}{n}$$

• También debemos recordar que se nos puede plantear el problema de relacionar los logaritmos de un mismo número en dos bases distintas ***a*** y ***b***. En este caso:

$$\frac{\log_a m}{\log_b m} = \log_a b$$

• En el caso de que tomemos b=10, el logaritmo se denomina ***"logaritmo común"*** y en el caso de tomar b=2,71828... = ***e,*** el logaritmo de denomina ***"logaritmo neperiano"***.

En base "diez" se escribe indistintamente:

$$x = 10^n \quad \text{ó} \quad n = \log x$$

Del mismo modo, en base "***e***" se escribe :

$$x = e^n \quad \text{ó} \quad n = \ln x$$

Ambos logaritmos se encuentran relacionados por las expresiones:

$$\log x = 0{,}43429 \ln x$$

$$\ln x = 2{,}3026 \log x$$

Las reglas fundamentales, deducidas a partir de la definición de logaritmo, nos permiten escribir expresiones análogas en base diez y en base **e**:

$\log (xy) = \log x + \log y$	$\ln (xy) = \ln x + \ln y$
$\log (x / y) = \log x - \log y$	$\ln (x / y) = \ln x - \ln y$
$\log (x^y) = y \log x$	$\ln (x^y) = y \ln x$

de donde obtenemos que:

$\log 10^n = n \log 10 = n$	$\ln e^n = n \ln e = n$

• Por último, debemos recordar también que:

Si *a* es el logaritmo de *x*, *x* es el ***"antilogarimo"*** de *a*, escrito como $x = \textbf{\textit{antilog}}\ a$

Ejemplo: $\log_{10}15 = 1{,}1761$ obteniéndose que $\mathbf{antilog_{10}\ 1{,}1761 = 10^{1{,}1761} = 15}$

Geometría Elemental

Entre las ecuaciones, relaciones y teoremas que manejamos con más asiduidad en el campo de la física, podemos indicar las siguientes:

A) Para un ***triángulo*** de vértices A, B, C y lados a, b y c, se cumple:

1. **la suma** de los **ángulos internos** es de 180º: **A + B + C = 180º**
2. si es **rectángulo**, uno de los ángulos es de 90º
3. si es **isósceles**, dos de los lados son de igual longitud
4. si es **escaleno**, los tres lados poseen distinta longitud
5. si es **equilátero**, los tres lados son iguales y cada uno de los ángulos es de 60º
6. que es **semejante** a otro de lados a´, b´ y c´ si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$ (relación de proporcionalidad entre lados correspondientes)

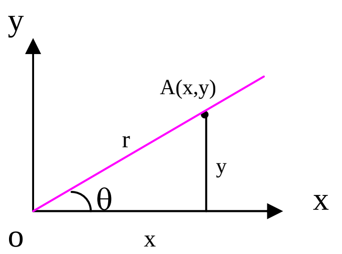
B) Para las **figuras geométricas** más utilizadas, expresaremos:

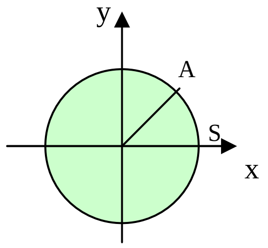
FIGURA GEOMÉTRICA	Longitud (m) – Área (m^2) – Volumen (m^3)
1. Circunferencia de radio R	$L = 2\pi R$; $A = \pi R^2$ (círculo)
2. Triángulo de base *b* y altura *h*	$A = (1/2)\, b\, h$
3. Superficie de una esfera de radio R	$A = 4\pi R^2$
4. Volumen de una esfera de radio R	$V = (4/3)\pi R^3$
5. Superficie cilindro circular de altura *h*	$A = 2\pi R^2 + 2\pi R h$
6. Volumen cilindro circular de altura *h*	$V = \pi R^2 h$
7. Cono de altura *h*, radio de la base R	$V = (1/3)\pi R^2 h$; $A = \pi R (h^2+R^2)^{1/2} + \pi R^2$

C) **Relaciones trigonométricas**

En trigonometría los ángulos se referencian a ejes coordenados cuya intersección corresponde al centro O de una circunferencia de radio ***r***. Así, el radio ***r=OA*** de la figura corresponde a la posición inicial del ángulo $\boldsymbol{\theta}$, tomando como sentido de giro el contrario del que poseen las agujas de un reloj. Teniendo en cuenta que los ángulos se miden en "grados", su valor puede expresarse por cualquier número real. Al mismo tiempo también podemos utilizar el "radián" como unidad de medida, teniendo en cuenta que un ángulo de 1 radián corresponde a un arco de circunferencia que posee la misma longitud que el radio con la que la trazamos.

En la figura se puede observar que el punto A posee como coordenadas (x,y), para un ángulo θ y un radio ***r***. Para establecer la relación entre ellas se usan las ***funciones trigonométricas***, también llamadas ***circulares.*** Como más útiles señalaremos las siguientes:

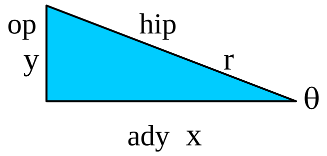




π rad = 180 º

$s = r \cdot \theta$

Triángulo rectángulo



Teorema de Pitágoras:
$\mathbf{r^2 = x^2 + y^2}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{op}{hip} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{x}{y}$$

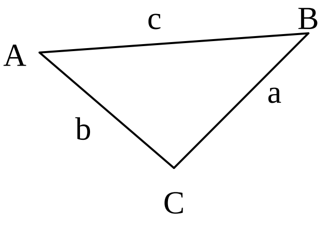
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{ady}{hip} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{y}$$

Identidades fundamentales

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$	$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\operatorname{sen}(\pi/_2 - \theta) = \cos\theta$	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi/_2 - \theta) = \cot\theta$	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
$\cos(\pi/_2 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$	$\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$

Ley de los senos y ley de los cosenos



$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

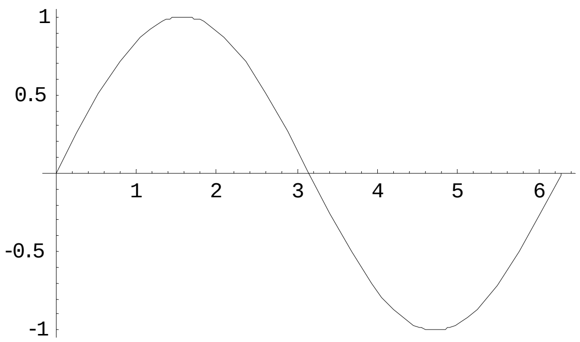
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

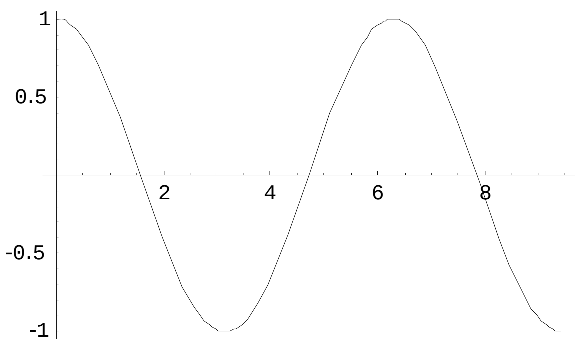
Relaciones algebraicas

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ $(a^2 - b^2) = (a + b).(a - b)$	Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumple que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

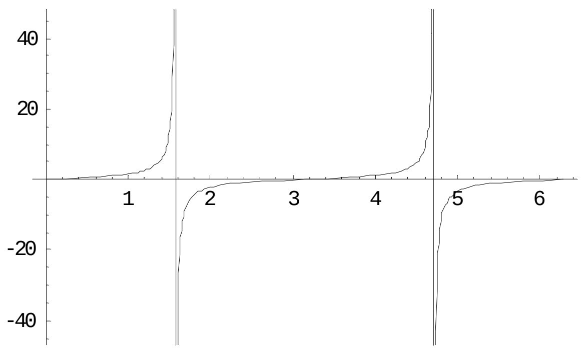
GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Función **“seno”** definida por f(x) = sen x
- gráfica para el intervalo $[0,2\pi]$ radianes
- función periódica: sen x = sen $(x+2\pi)$
- función impar: sen (-x) = - sen x
- creciente $(0 , \pi/2)$ y $(3\pi/2 , 2\pi)$
- decreciente $(\pi/2, 3\pi/2)$
- la función inversa 1/sen x = cosec x



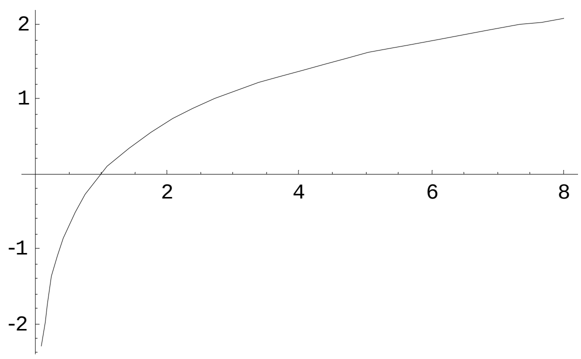
Función **“coseno”** definida por f(x) = cos x
- función periódica: cos x = cos $(x+2\pi)$
- función par: cos (-x) = cos x
- creciente $(\pi, 2\pi)$
- decreciente $(0, \pi)$
- la función inversa 1/cos x = sec x



Función **“tangente”** definida por f(x) = tg x

- creciente en su dominio
- decreciente: no
- período π ; tg x = tg $(x+\pi)$
- impar: tg (-x) = - tg x
- la función cotag x = 1/tag x

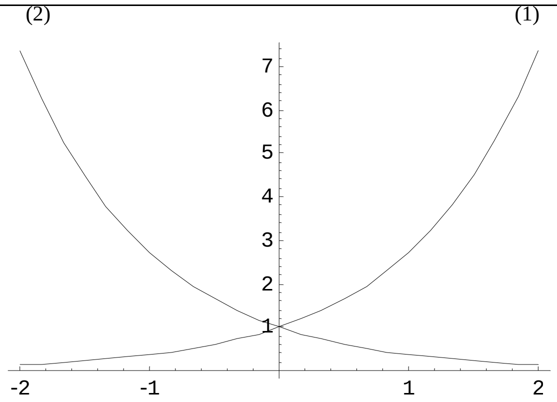
FUNCIONES MÁS UTILIZADAS EN FÍSICA



“Función logarítmica”:

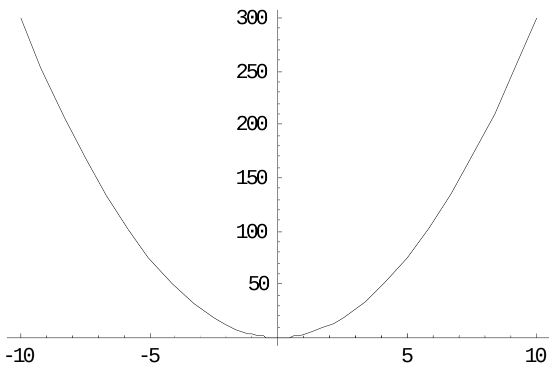
y = ln x = L x

Para analizar sus propiedades se recomienda visitar la siguiente página:



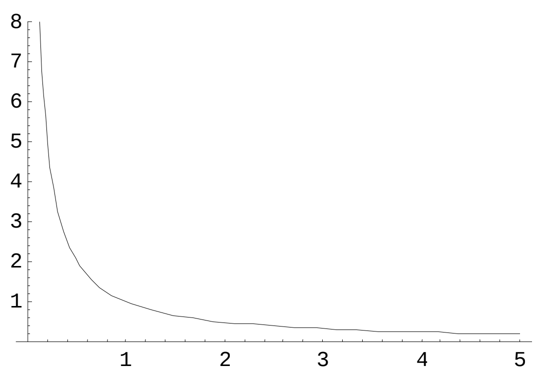
“Función exponencial”:

(1) $\mathbf{y = e^{x}}$
(2) $\mathbf{y = e^{-x}}$



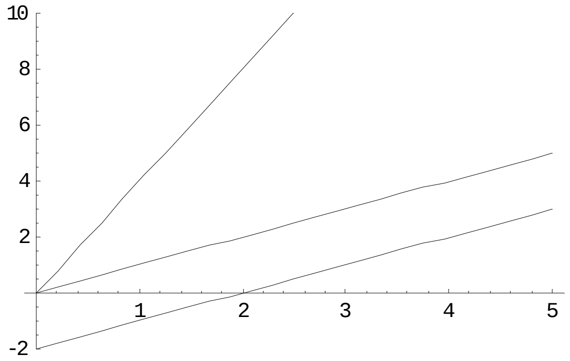
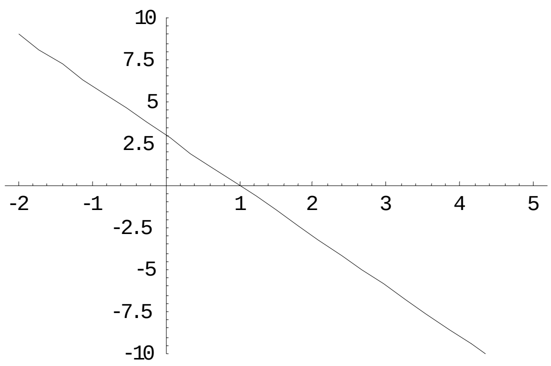
Gráfica que corresponde a una “**parábola”**. Ecuación cuadrática ó de segundo grado, dónde **k** es una constante. $\mathbf{y = k\, x^2}$

Ejemplo de fig.: $y = 3\,x^2$



Gráfica que corresponde a una “**hipérbola”**. Se expresa como:

$\mathbf{y.x} = \mathbf{k}$ ó bien $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}} = \frac{1}{\mathbf{x}}$

	Gráficas con ejemplos de distintas "**ecuaciones lineales"**. Como habíamos visto son ecuaciones de la forma: $\mathbf{y = mx + n}$ dónde **m** es la pendiente y **n** es la ordenada en el origen. **Ejemplos:** (1) y = x + 0 (pendiente, m=1, n=0) (2) y = 4x + 0 (pendiente, m=4, n=0) (3) y = x – 2 (pendiente, m=1, n= -2)
	**Ecuación lineal** similar a las anteriores, sin embargo su pendiente es negativa. El **ejemplo** que se muestra es y = - 3x+3 Con pendiente m = -3 y ordenada en el origen n = 3.

Tema: Cálculo Vectorial

Presentación

A menudo nos enfrentamos con problemas que tienen que trabajar con cantidades físicas que tienen tanto propiedades numéricas como direccionales; para representar estas cantidades se emplean los vectores.

El uso de los vectores se hace fundamental en la Física, por lo que es imperativo dominar sus propiedades tanto geométricas como algebraicas.

En este tema se analizan las herramientas gráficas y analíticas con que manejar los vectores; operaciones como la suma, resta, multiplicación, ... y propiedades como el producto escalar, vectorial o mixto.

Objetivos

Expresar y representar adecuadamente los vectores, convirtiendo su uso en algo sencillo e incluso rutinario.

Dominar el álgebra vectorial y las propiedades básicas de los vectores como herramienta básica para afrontar y resolver problemas físicos.

Contenidos

1. Magnitudes escalares y vectoriales.

2. Operaciones básicas.

3. Componentes de un vector.

4. Producto escalar.

5. Producto vectorial.

6. Producto mixto.

1. Magnitudes escalares y vectoriales.

Una ***magnitud*** es todo aquello que se puede medir.

Un ***vector*** es un segmento orientado (una cantidad que tiene módulo y dirección).

Un ***escalar*** es una cantidad con tamaño pero sin dirección.

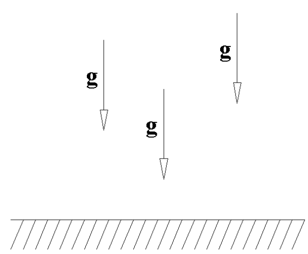
***Ejemplos de escalares*:** temperatura, longitud, masa, densidad, tiempo, energía, ...

***Ejemplos de vectores*:** velocidad, aceleración, fuerza, ...

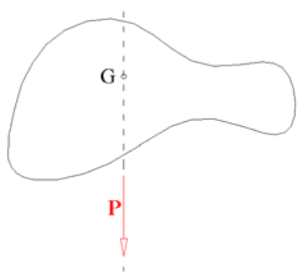
***Notación*:** un vector se representa de múltiples formas según cada autor, sin embargo en general, un vector se representa con su nombre y una flecha superior ($\vec{r}$). Otras notaciones habituales: $\bar{r}$, $\underline{r}$, **r**, ... En adelante, usaremos el nombre del vector en negrita por sencillez: **r**. El módulo de un vector **r** se representa como: $|\mathbf{r}|$.

***Clasificación de vectores*:**

- ***Libres*:** son aquellos que pueden moverse paralelamente a si mismos por el espacio conservando su módulo y sentido. Ej.- aceleración de la gravedad.

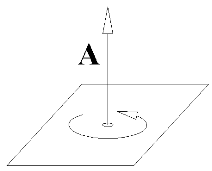


- ***Deslizantes*:** pueden deslizarse a lo largo de su recta soporte conservando su módulo y sentido. Ej.- fuerza realizada sobre un sólido rígido.



- ***Ligados*:** están ligados a un punto geométrico determinado, o a una trayectoria. Ej.- velocidad de un móvil en una carretera.

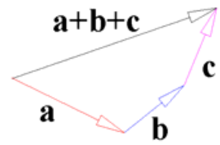
- ***Seudovectores*:** son magnitudes que por convenio adoptan la forma de vectores para ser representadas. Ej.- una superficie, la velocidad angular, la aceleración angular.



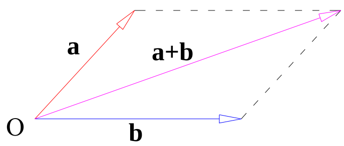
2. Operaciones básicas.

***Igualdad de dos vectores*.-** dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección, independientemente de su punto de aplicación.

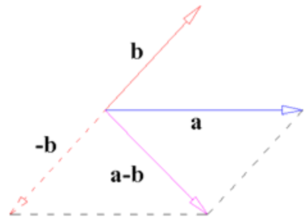
***Suma de vectores*.-** sumar dos o más vectores **a**, **b**, **c**,... geométricamente consiste en colocar un vector a continuación del otro, y la suma tendrá como origen, el origen del primero y como extremo, el extremo del último.



Para sumar dos vectores también se puede utilizar la ***regla del paralelogramo***, que consiste en colocar ambos vectores con el mismo origen O, y la suma será la diagonal del paralelogramo formado de tal forma con origen en O.



***Resta de vectores*.-** una resta de vectores se convierte en una suma considerando vectores negativos (**-a** es el negativo de **a** si tienen igual módulo pero dirección opuesta): $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.



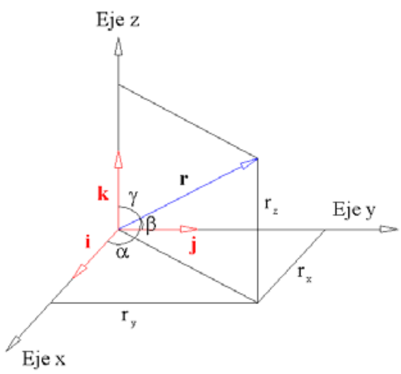
***Producto de un vector por un escalar*.-** multiplicar un vector **r** por un escalar *m* da como resultado otro vector con la misma dirección que **r** y con un módulo: $m \cdot |\mathbf{r}|$

***Cociente de un vector por un escalar*.-** dividir un vector **r** por un escalar *m* da como resultado otro vector de igual dirección que **r** pero módulo: $|\mathbf{r}|/m$.

Normalizar un vector consiste en dividirlo por su propio módulo para obtener un vector de igual dirección pero módulo unidad (***vector unitario***).

3. Componentes de un vector.

Dado un sistema de coordenadas cartesiano u ortonormal, llamamos ***componentes cartesianas*** de un vector **r** a sus proyecciones a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas r_x, r_y, r_z.



Un ***versor*** es un vector de módulo unidad (vector unitario) en la dirección de los ejes coordenados. En un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional tenemos tres versores **i**, **j**, **k**, y cualquier vector lo podremos expresar como combinación lineal de ellos: $\mathbf{r} = r_x \cdot \mathbf{i} + r_y \cdot \mathbf{j} + r_z \cdot \mathbf{k}$.

$\left.\begin{aligned} r_x &= |r| \cdot \cos\alpha \\ r_y &= |r| \cdot \cos\beta \\ r_z &= |r| \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\}$, siendo $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ los ***cosenos directores*** de **r**, que cumplen:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

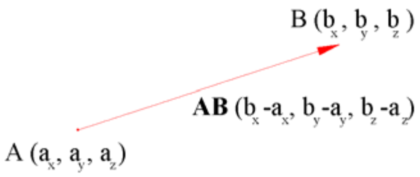
$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Podemos calcular el ***módulo*** de un vector mediante sus componentes cartesianas como:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Representando el extremo de un vector por el punto *B* de coordenadas b_x, b_y, b_z y el origen mediante el punto *A* de coordenadas a_x, a_y, a_z podemos determinar sus componentes cartesianas (y llamaremos vector **AB**) como las coordenadas del extremo menos las del origen:

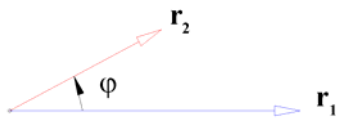
$$\mathbf{AB} = \left(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\right)$$



4. Producto escalar.

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ está definido como el *escalar* resultado de multiplicar el módulo del primero $|\mathbf{r_1}|$, por el módulo del segundo $|\mathbf{r_2}|$ y por el coseno del ángulo que forma el primero con el segundo φ (“ángulo medido de un vector al otro por el camino más corto”).

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = |\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2| \cdot \cos\varphi$$



El **producto escalar** de dos vectores **a** y **b** en función de sus componentes:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

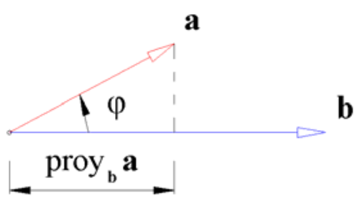
Propiedades:

- Conmutativa: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- Distributiva respecto a la suma: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- Asociativa respecto al producto de un escalar λ: $\lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{b})$

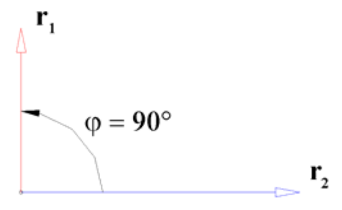
Significado geométrico: la **proyección** de un vector **a** sobre otro vector **b** ($proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$) es una distancia que se puede calcular como el producto escalar del vector a proyectar por un vector unitario en la dirección del vector sobre el que se proyecta.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi \\ \cos\varphi = \dfrac{proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a} \Rightarrow proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} proy_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{b}} \\ \mathbf{u}_{\mathbf{b}} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \end{array}}$$



Condición de perpendicularidad: dos vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ son ortogonales o perpendiculares si su producto escalar es nulo: $r_1 \cdot r_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 \perp r_2$.



Otras propiedades:

- El módulo de un vector **a** se puede calcular como: $a \cdot a = |a|^2$

- El ángulo entre dos vectores **a** y **b** se puede calcular como: $\varphi = \arccos \dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$

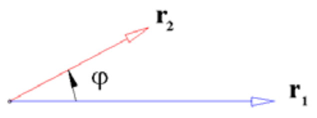
5. Producto vectorial.

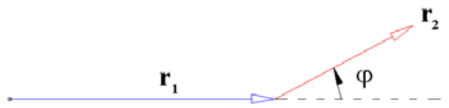
El **producto vectorial** de dos vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ en un espacio tridimensional real es otro *vector*

$$\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} \quad \acute{o} \quad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{r_2}$$

- cuyo módulo es el producto del módulo del primer vector $|\mathbf{r_1}|$, por el módulo del segundo $|\mathbf{r_2}|$ y por el seno del ángulo que forma el primero con el segundo φ ("ángulo medido del primer vector al segundo por el camino más corto").

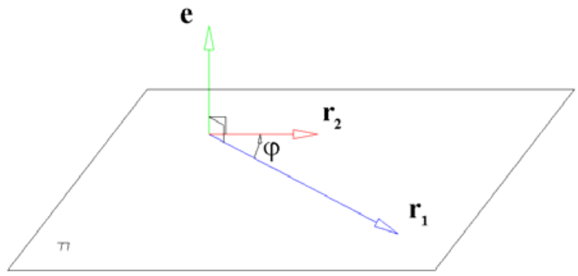
$$|\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}| = |\mathbf{r_1}| \cdot |\mathbf{r_2}| \cdot sen\varphi$$



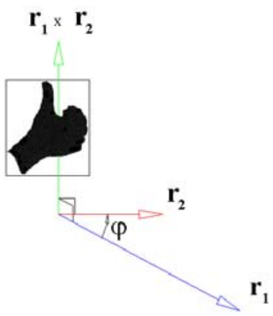


- cuya dirección es perpendicular a los dos vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$:

$$\mathrm{r}_1 \times \mathrm{r}_2 = |\mathrm{r}_1| \cdot |\mathrm{r}_2| \cdot sen\varphi \cdot \mathrm{e}$$
$$\mathrm{e} \perp (\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2)$$



- y el sentido es el dirigido de acuerdo a la "regla de la mano derecha".



El **producto vectorial** de dos vectores **a** y **b** en función de sus componentes se puede obtener calculando el siguiente determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} =$$
$$= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \mathbf{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \mathbf{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \mathbf{k}$$

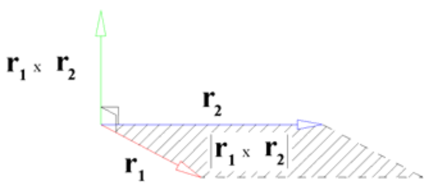
donde la primera fila del determinante está formada por los versores **i**, **j**, **k**, la segunda fila por las componentes del primer vector **a** y la tercera por las componentes del segundo vector **b**.

Propiedades:

- Anticonmutativa: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- Distributiva respecto a la suma: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- Asociativa respecto al producto de un escalar λ: $\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \cdot \mathbf{b})$

Significado geométrico: el **área** del paralelogramo definido por los vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ con el mismo origen O se puede representar por el producto vectorial $\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}$, y su valor es igual al módulo de dicho producto vectorial.

$$\acute{A}rea = |\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}|$$



Condición de paralelismo: dos vectores $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ son paralelos si su producto vectorial es nulo: $\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{r_1} // \mathbf{r_2}$.

6. Producto mixto.

Se llama **producto mixto** de tres vectores $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$ al producto escalar de $\mathbf{r_1}$ por el producto vectorial $r_2 \times r_3$:

$$[\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}] = \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3}$$

Nota: es evidente que para calcular el producto mixto, primero se calcula el producto vectorial y luego se realiza el producto escalar; no tiene sentido realizar primero el producto escalar y luego el vectorial (no se puede multiplicar vectorialmente un escalar por un vector). Por esta razón, no hace falta usar paréntesis en la expresión anterior; si se prefiere por claridad:

$$[\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}] = \mathbf{r_1} \cdot (\mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3})$$

El **producto mixto** de tres vectores **a**, **b** y **c** en función de sus componentes se puede obtener calculando el siguiente determinante:

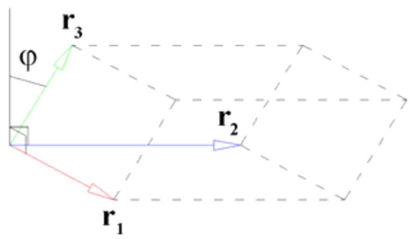
$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot a_x - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot a_y + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot a_z =$$
$$= (b_y \cdot c_z - b_z \cdot c_y) \cdot a_x + (b_z \cdot c_x - b_x \cdot c_z) \cdot a_y + (b_x \cdot c_y - b_y \cdot c_x) \cdot a_z$$

Identidades:

- Pueden permutarse las operaciones "·" y "*x*" : $[\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}] = \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3} = \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{r_3}$
- El producto mixto mantiene el mismo valor si se permutan los vectores respetando el orden cíclico: $[\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}] = [\mathbf{r_3},\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}] = [\mathbf{r_2},\mathbf{r_3},\mathbf{r_1}]$
  $\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} \times \mathbf{r_3} = \mathbf{r_3} \cdot \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} = \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{r_3} \times \mathbf{r_1}$
- En el caso anterior, si no se respeta el orden cíclico: $[\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}] = -[\mathbf{r_1},\mathbf{r_3},\mathbf{r_2}]$

Significado geométrico: el **volumen** del paralelepípedo definido por los vectores $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$ es igual a su producto mixto:

$$Volumen = [\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}]$$



$$Volumen = [\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}] = \mathbf{r_3} \cdot \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2} = |\mathbf{r_3}| \cdot |\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}| \cdot \cos\varphi$$

Condición de coplanariedad: tres vectores $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$ son coplanarios si su producto mixto es nulo: $[\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}] = 0 \Leftrightarrow Vectores\ \ coplanarios$; para que tres vectores sean coplanarios, al menos dos de ellos deben ser paralelos.

Preguntas habituales

P1. Para calcular las componentes cartesianas de un vector a partir de las coordenadas de sus puntos extremos (A y B), ¿obtendremos el mismo resultado si restamos las coordenadas de A a las de B, o si restamos las de B a las de A?

P2. ¿Cómo se aplica la *"regla de la mano derecha"*?

Soluciones

S1. No, el resultado es diferente. Si a las coordenadas del punto B le restamos las coordenadas del punto A obtendremos el vector **AB**, pero si es al contrario, es decir, a las coordenadas de A le restamos las coordenadas de B, el resultado es el vector **BA**, que es el vector opuesto al anterior: **AB** = - **BA**.

S2. Cuando se quiere determinar el sentido del vector **c** obtenido del producto vectorial de dos vectores **a** y **b**, se emplea la *"regla de la mano derecha"*. Esta regla nemotécnica consiste en visualizar mentalmente la siguiente composición: en primer lugar se coge el primer vector del producto vectorial (**a**), y a continuación, se coloca el segundo vector (**b**) con su origen en el extremo del primero; entonces nos imaginamos el borde de la palma de la mano derecha encima del primer vector y el dedo meñique sobre el segundo vector; en esta situación, el pulgar extendido indica la dirección de **c**, perpendicular a los vectores **a** y **b**.

Problemas y ejercicios resueltos y comentados

E1. Dados los vectores **a** = 3**i**+2**j**-4**k**; **b** = **i**-3**j**+**k**; **c** = 2**i**-**k**, determinar:

a) El vector **d** = 2**a**-(**b**+3**c**).

b) Un vector unitario en la dirección de **a**.

c) El ángulo que forma el vector **a** con el eje Z.

a) Puesto que sumar o restar vectores consiste en sumar o restar las respectivas componentes cartesianas, se tendrá:

$$2\cdot\mathbf{a} = 2\cdot(3, 2, -4) = (6, 4, -8)$$

$$-\mathbf{b} = -(1, -3, 1) = (-1, 3, -1)$$

$$-3\cdot\mathbf{c} = -3\cdot(2, 0, -1) = (-6, 0, 3)$$

$$2\cdot\mathbf{a}-(\mathbf{b}+3\cdot\mathbf{c}) = (-1, 7, -6) = -\mathbf{i}+7\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

b) Por el concepto de vector unitario:

$$\mathbf{u_a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}}{\sqrt{3^2+2^2+(-4)^2}} = 0.56\mathbf{i}+0.37\mathbf{j}-0.74\mathbf{k}$$

Que efectivamente es un vector de módulo unidad:

$$|\mathbf{u_a}| = \sqrt{0.56^2+0.37^2+(-0.74)^2} = 1$$

c) Sabiendo que las componentes cartesianas de un vector unitario coinciden con los cosenos directores correspondientes, se tendrá:

$$u_z = \cos\gamma \Rightarrow \gamma = \arccos(u_z)$$
$$\gamma = \arccos(-0.74) = 138^\circ$$

E2. Dados los vectores **A** = (2, -1, 3), **B** = (-1, 1, 0) y **C** = (-2, 1, 5):

a) Determinar el vector 2·**A**-2·**B**-**C**.

b) Calcular su módulo y sus cosenos directores.

a) Igual que el ejercicio anterior, sumar o restar vectores consiste en sumar o restar sus componentes cartesianas:

2·**A** = 2·(2, -1, 3) = (4, -2, 6)

-2·**B** = -2·(-1, 1, 0) = (2, -2, 0)

-**C** = -(-2, 1, 5) = (2, -1, -5)

2·**A**-2·**B**-**C** = (8, -5, 1) = 8**i**-5**j**+**k**

b) Llamaremos al vector anterior **D** = 2·**A**-2·**B**-**C**. Su módulo es:

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{8^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{90} \quad u$$

y sus cosenos directores:

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} = \frac{(8,-5,1)}{\sqrt{90}} = (0.84, -0.53, 0.11)$$

que efectivamente cumplen:

$$0.84^2 + (-0.53)^2 + 0.11^2 = 1$$

E3. Calcular el productor escalar y el producto vectorial de los vectores **a** = 2**i**+4**j**+6**k**, **b**=**i**+2**j**+3**k**.

En función de las componentes cartesianas de los vectores se obtiene:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2,4,6) \cdot (1,2,3) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 2 + 8 + 18 = 28$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} =$$

$$= (4 \cdot 3 - 6 \cdot 2) \cdot \mathbf{i} + (6 \cdot 1 - 2 \cdot 3) \cdot \mathbf{j} + (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) \cdot \mathbf{k} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

E4. Dados los vectores **a** =6**i**+**j**+**k**; **b** = 3**j**-**k**; **c** = -2**i**+3**j**-5**k**, calcular el valor que deberá tener el escalar λ para que el vector **a**+ λ**b** sea perpendicular a **c**.

Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo, así que debe cumplirse la condición:

$$(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$$

que en componentes:

$$[(6,\ 1,\ 1) + \lambda\cdot(0,\ 3,\ -1)] \cdot (-2,\ 3,\ -5) = 0$$

$$(6,\ 1+3\lambda,\ 1-\lambda) \cdot (-2,\ 3,\ -5) = 0$$

y realizando el producto escalar resulta:

$$6\cdot(-2) + (1+3\lambda)\cdot 3 + (1-\lambda)\cdot(-5) = 0$$

$$-12 + 3 + 9\cdot\lambda - 5 + 5\cdot\lambda = 0$$

$$-14 + 14\cdot\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

E5. Dados los vectores **a** =2**i**-5**j**+3**k** y **b** = 3**i**+b_y**j**+b_z**k**, determinar b_y y b_z para que **a** y **b** sean paralelos.

Dos vectores son paralelos si su producto vectorial es nulo, por lo tanto:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -5 & 3\\ 3 & b_y & b_z\end{vmatrix}=(-5\cdot b_z-3\cdot b_y)\cdot\mathbf{i}+(9-2\cdot b_z)\cdot\mathbf{j}+(2\cdot b_y+15)\cdot\mathbf{k}=0\cdot\mathbf{i}+0\cdot\mathbf{j}+0\cdot\mathbf{k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5\cdot b_z-3\cdot b_y=0\Rightarrow b_z=-\dfrac{3}{5}b_y\\ 9-2\cdot b_z=0\Rightarrow b_z=4.5\\ 2\cdot b_y+15=0\Rightarrow b_y=-7.5\end{cases}$$

E6. Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores **a** = 2**i**+3**j**-**k**; **b** = -**i**+2**j**+2**k** y sus paralelas respectivas.

Aprovechando las propiedades del producto vectorial, el área A del paralelogramo formado por dos vectores **a** y **b** y sus respectivas paralelas es igual al módulo del producto vectorial de dichos vectores, así:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=(6+2)\cdot\mathbf{i}+(1-4)\cdot\mathbf{j}+(4+3)\cdot\mathbf{k}=8\cdot\mathbf{i}\text{-}3\cdot\mathbf{j}+7\cdot\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{122}\quad u^2$$

E7. Dos vectores **a**, **b** tienen un origen común en el punto P(-1, 2, 1) y sus extremos están situados en los puntos A(3, 2, 1) y B(2, -4, -2), respectivamente. Determinar el área del triángulo $P\hat{A}B$.

En primer lugar expresaremos los vectores **a** y **b** por sus componentes cartesianas:

a = **PA** = A – P = (3, 2, 1) – (-1, 2, 1) = (4, 0, 0)

b = **PB** = B – P = (2, -4, -2) – (-1, 2, 1) = (3, -6, -3)

El área del triángulo $P\hat{A}B$ será la mitad de la del paralelogramo formado por los vectores **a** y **b**, y sus paralelas trazadas por sus extremos, que coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores:

$$\acute{A}rea\,P\hat{A}B=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & 0 & 0\\ 3 & -6 & -3\end{vmatrix}=12\mathbf{j}\,\text{-}\,\mathbf{24k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{12^2+24^2}=26.8$$

$$\acute{A}rea\,P\hat{A}B=\frac{1}{2}26.8=13.4\quad unidades\quad de\quad superficie$$

E8. Dado el vector **v** = 2**i**+3**j**-**k**, determinar las componentes de dicho vector a lo largo de las direcciones de los vectores **a** = **k**; **b** = **i**+**j**+**k** y **c** = **i** + **k**.

Para calcular las componentes pedidas podemos usar las propiedades del producto escalar para calcular proyecciones (la proyección de un vector sobre una dirección es lo mismo que su componente en esa dirección).

Componente de **v** sobre **a**: $proy_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(2,3,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1^2}} = -1$

Componente de **v** sobre **b**: $proy_{\mathbf{b}}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(2,3,-1)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Componente de **v** sobre **c**: $proy_{\mathbf{c}}\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{(2,3,-1)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$